# ARITMÉTICA.

## ARTICULO PRIMERO.

### NUMERACION.

1. Llámase *unidad* la cantidad que sirve para medir todas las demas de su misma especie, examinando cuántas veces está contenida en cada una de ellas: y *número* el signo que representa las veces que se contiene la unidad en la cantidad medida. La *Aritmética* es la ciencia de los números.

Si al servirnos de la unidad para medir una cantidad sucede que despues de contar una, dos ó mas unidades, no queda nada que medir de la cantidad, el número será *entero*. Pero si despues de una, dos ó mas mediciones queda un residuo menor que la unidad, este residuo se llama *fraccion* ó *quebrado*, y no se podrá medir con la unidad, sino con una parte de ella; como, por ejemplo, su mitad, su tercio, su cuarta parte etc. El signo que representa en este caso toda la cantidad se llama número *fraccionario* ó *mixto*.

Por ejemplo, si al medir el largo de una sala con la vara, que es unidad de distancias, hallo que despues de contar seis varas he llegado exactamente al fin de la longitud, diré que esta vale seis varas, y este número seis es entero. Pero si despues de haber contado diez varas queda un residuo menor que una vara, el número será fraccionario, y la longitud valdrá diez varas y una fraccion. Para medir esta fraccion dividiré la vara en un número conveniente de partes, por ejemplo en doce, y mediré la fraccion con una duodécima parte de la vara; y si veo que esta nueva unidad se contiene en la fraccion siete veces, diré que la sala tiene de largo diez varas y siete duodécimas partes de otra vara.

Las cantidades que contienen *una, dos, tres, cua-*

*tro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve* unidades, se representan respectivamente con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que se llaman *notas*, *cifras* ó *guarismos*.

Con ellos se espresa cualquier cantidad por grande que sea. Para esto de cada diez unidades se ha formado una *clase*, que se llama *decena*: de cada diez decenas una *centena*, llamada asi porque contiene cien unidades: de cada diez centenas un *millar:* de cada diez millares una *decena de millar:* de cada diez decenas de millar una *centena de millar.* Las cifras que representan estas clases se colocan sucesivamente á la izquierda desde la unidad hasta la centena de millar.

Si la cantidad es tan grande que las clases ya nombradas no basten á espresarla, se usa de otras seis clases superiores, que se colocan en el mismo orden, las mayores hácia la izquierda. Sus nombres son: *cuento*, *decena de cuento*, *centena de cuento*, *millar de cuento*, *decena de millar de cuento*, *centena de millar de cuento.* Para espresar mayores cantidades se han formado órdenes semejantes de bicuento, tricuento etc., siempre bajo la ley de que *diez unidades de una clase compongan una unidad de la que se le sigue á la izquierda.* En la clase donde no hay unidades se coloca la cifra 0, que se pronuncia *cero.*

Para leer un número se dividirá de seis en seis notas, y se distinguirán sin dificultad las notas que pertenecen á los órdenes de cuento, bicuento, tricuento...... El número 512″006281′670023 se lee asi: quinientos doce bicuentos, seis mil doscientos ochenta y un cuento, seiscientos setenta mil veinte y tres unidades.

Se ve, pues, que cada nota se hace 10 veces mayor por cada lugar que se retire hácia la izquierda; luego para hacer una cantidad diez veces mayor de lo que es, se le unirá un cero á la derecha, lo que retirará cada una de sus notas un lugar á la izquierda. Por la misma razon si se quiere hacer la cantidad cien veces mayor, se le unirán dos ceros á la derecha: si

mil veces mayor, se le unirán tres ceros etc. Y al contrario, suprimiendo 1, 2, 3..... ceros de la derecha de una cantidad, se hará 10, 100, 1000..... veces menor.

## 2.° *Operaciones aritméticas con los números enteros.*

2. Adicion es la reunion de muchos números en uno solo. Se espresa interponiendo entre ellos el signo +, que se pronuncia *mas*, y se llama signo positivo. *Suma* es el resultado de la adicion. Asi $2+3+4$ indica la reunion de 2, 3, 4, y la suma es 9. Se escribe asi: $2+3+4=9$; porque este signo $=$ significa la igualdad de la cantidad de su izquierda con la de su derecha. *Ecuacion* es la igualdad de dos cantidades, espresada por medio del signo $=$. Las dos cantidades que se igualan, se llaman *miembros* de la ecuacion.

La desigualdad de dos cantidades se denota ó con el signo $<$, ó con el signo $>$. La cantidad menor se escribe siempre en la punta. Asi $4<9$, $9>4$ se lee: 4 es menor que 9, 9 es mayor que 4.

*Multiplicacion* es la suma de muchas cantidades iguales. La cantidad que se repite se llama *multiplicando:* el número, que representa cuántas veces se repite, se llama *multiplicador*, y la suma toma el nombre de *producto*. *Factores* del producto son el multiplicando y el multiplicador. Esta operacion se espresa poniendo un aspa ó un punto entre los dos factores. Asi $4+4+4+4+4+4=24$, se espresa asi: $4\times6=24$, y se lee: 4 multiplicado por 6 es igual á 24. El multiplicando es 4: el multiplicador 6: el producto 24: 4 y 6 son factores de 24.

La *sustraccion*, operacion inversa de la adicion, consiste en hallar el número, que añadido á otro dado, produce otro tambien dado; ó en hallar, dada la suma y una de sus partes, la otra que falta. Esta operacion se espresa con el signo —, que se pronuncia *menos*, y se llama signo negativo, puesto entre la cantidad mayor, que se llama *minuendo*, y la menor, que

se llama *subtrahendo.* El resultado de esta operacion se llama *residuo* ó *diferencia.* Asi $9-5=4$, porque $4+5=9$: 9 es el minuendo, 5 el subtrahendo, y 4 el residuo.

La *division*, operacion inversa de la multiplicacion, consiste en hallar un número, que multiplicado por otro dado, produzca otro tambien dado; ó en hallar, conocido el producto y uno de los factores, el otro factor. El producto toma el nombre de *dividendo:* el factor conocido, el de *divisor*, y el factor que se busca, el de *cociente.* Se espresa con una línea, en cuya parte superior se escribe el dividendo, y en la inferior el divisor. Asi $\frac{8}{4}=2$: porque $4\times 2=8$. El dividendo es 8, el divisor 4, y el cociente 2.

3. Para sumar los números enteros reunanse sucesivamente todas sus unidades, decenas, centenas........ Si en la suma de las unidades de una clase resulta una ó mas unidades de la clase inmediatamente superior, se *reservan* para añadirlas á esta clase.

*Ejemplo.*

$$\begin{array}{r} 3731 \\ 349 \\ 12487 \\ 54 \\ \hline 16621 \end{array}$$

La suma de las unidades compone 1 unidad y 2 decenas. Escribo 1 debajo de las unidades, y reservo las 2 decenas para añadirlas á la clase de las decenas. La suma de esta clase compone 2 decenas y 2 centenas. Pongo 2 debajo de las decenas, y añado á la columna siguiente las 2 centenas de la *reserva;* y asi de las demas clases.

Para *restar* ó sustraer dos números enteros, busco un número, cuyas clases, sumadas con las correspondientes del subtrahendo, produzcan las correspondientes del minuendo: luego restando de cada clase del minuendo la correspondiente del subtrahendo, tendré la correspondiente del residuo. Si la cifra del minuendo es menor que la del subtrahendo (por ejemplo, si la primera es 5 y la segunda 7), querrá decir, que la nota del subtrahendo, sumada con la del residuo, compone la del minuendo con 10 de mas (en el ejemplo

presente, la nota del residuo, sumada con 7, no podrá componer 5, sino 15), y esta decena se habria reservado en la suma para la clase siguiente. Considérese, pues, una decena de mas en la nota del minuendo, y réstesele la nota del subtrahendo (diré en el ejemplo presente 15—7=8); y en la clase inmediatamente superior quitaré á la nota del minuendo una unidad (que es la decena que añadí al 5) ó lo que es lo mismo, añadiré una unidad á la nota del subtrahendo.

*Ejemplo.*

| | |
|---|---|
| 36147<br>19328<br>16819 | Diré: de 8 á 17 van 9: de 3 á 4, 1: de 3 á 11, 8: de 10 á 16, 6: de 2 á 3, 1. |

4. Llámase *complemento aritmético* de un número su diferencia á la unidad seguida de tantos ceros como notas tiene el número, es decir, á la unidad inmediatamente superior á la clase mayor del número. Así el complemento de 6 es su diferencia á 10: el de 32, su diferencia á 100: el de 824, su diferencia á 1000: el de 54208, su diferencia á 100000.

El complemento aritmético de un número se halla con suma facilidad, restando todas sus notas de 9 y la última de las unidades de 10. El complemento de 5342 es 4658.

Cuando el número acaba en ceros, la nota que se resta de 10 es la última significativa de la derecha; y el complemento ha de tener á la derecha de esta nota tantos ceros como el número. El complemento de 45300 es 54700.

Sirve el complemento aritmético para convertir en adicion la resta de dos cantidades; pues si en lugar de restar el subtrahendo del minuendo, le añado á este el complemento del subtrahendo, esto es, lo que le falta para componer la unidad superior, debe resultar el residuo aumentado en dicha unidad superior, que es facil suprimir.

| *Ejemplo.* | *Por complemento.* |
|---|---|
| 5432 | 5432 |
| 3957 | 6043 |
| 1475 | 11475 |

Añado al minuendo el complemento de 3957; y resulta el resíduo con 10000 de mas.

Cuando hay que sumar y restar varias cantidades, en lugar de las que se han de restar se ponen sus complementos: se suman; y quitando las unidades superiores correspondientes á los complementos que se tomaron, se tendrá en una sola suma el resultado de todas las sumas y restas.

*Ejemplo.*

| |
|---|
| 9427 |
| 1257 |
| 6034 |
| 6478 |
| 4960 |
| 28156 |

Se quiere saber cuánto es 9427—3522+1257+6034—5040.

En la suma hay 20000 de mas, 10000 por el complemento de 3522, y 10000 por el de 5040. El resultado es 8156.

5. *La suma de varias cantidades se aumenta ó disminuye en la misma cantidad que se aumente ó disminuya una de ellas.* Porque si $9 = 5 + 4$, y queremos añadir al número 4, 3 unidades, será necesario añadir el mismo 3 al primer miembro para que subsista la igualdad, y será $9 + 3 = 5 + 4 + 3$, ó $12 = 5 + 7$. Por la misma razon $9 - 3 = 5 + 4 - 3$, ó $6 = 5 + 1$.

*La suma de varias cantidades no se altera, aunque una de ellas se aumente en la misma cantidad que se disminuya otra:* porque si $9 = 5 + 4$, añadiendo 3 á 5, y restando 3 de 4, no se altera el segundo miembro; pues equivale á añadirle $3 - 3$, que es cero.

*El resíduo de la sustraccion se aumenta ó disminuye en la misma cantidad que se aumente ó disminuya el minuendo:* porque el minuendo es la suma del subtrahendo y resíduo.

*El resíduo se disminuye en la misma cantidad que se aumente el subtrahendo, y se aumenta en la misma cantidad que se disminuya el subtrahendo, permaneciendo el mismo minuendo:* porque, siendo este la suma de subtrahendo y resíduo, y debiendo no sufrir alteracion, es necesario qne una de sus partes se aumente en la misma cantidad que se disminuye la otra.

*El resíduo no se altera, aunque á minuendo y á subtrahendo se les añada ó reste una misma cantidad:* porque si $6 = 9 - 3$, añadiendo á 9 y á 3 el número 5, equivale á añadir al segundo miembro $5 - 5$, que es cero: y por tanto $6 = 14 - 8$. Del mismo modo, quitando 1 de 9 y de 3, equivale á quitar del segundo miembro 1 y añadirle 1: pues el 1, que se quita al subtrahendo, se aumenta al resíduo: luego el segundo miembro, que representa el valor del resíduo, no sufrirá alteracion.

6 *El producto de dos factores no se altera, aunque se tome al multiplicando por multiplicador, y á este por multiplicando:* esto es, $4 \times 3 = 3 \times 4$.

*Demostracion.* El producto de $4 \times 3$ se halla, repitiendo 3 veces cada una de las unidades del 4: lo que produce el siguiente cuadro, en el cual cada punto representa una unidad.

. . . .
. . . .
. . . .

El producto de $3 \times 4$ se halla, repitiendo 4 veces cada una de las unidades del 3: lo que produce el siguiente cuadro

. . .
. . .
. . .
. . .

Este cuadro es idéntico con el anterior; pues mirándolo de lado tiene las mismas unidades en hilera y en columna: luego $3 \times 4 = 4 \times 3$: luego etc.

*El producto de tres factores no se altera, sea cual fuere el orden en que se multipliquen.*

*Demostracion.* Propongámonos multiplicar $4 \times 3 \times 5 = (4+4+4)\,5$. (El paréntesis significa que lo que está fuera de él debe multiplicarse por lo que hay dentro). Pero $(4+4+4)\,5 = 20+20+20 = 20 \times 3 = 4 \times 5 \times 3 = 5 \times 4 \times 3$: luego el 3 puede dejarse para último factor. Tambien podrá dejarse el 4: pues $4 \times 3 \times 5 = (3+3+3+3)\,5 = 15+15+15+15 = 15 \times 4 = 3 \times 5 \times 4 = 5 \times 3 \times 4$.

Demostremos este mismo principio de cualquier número de factores.

Si son cuatro, por ejemplo, $6\times4\times3\times2=24\times3\times2=(24+24+24)\,2=48+48+48=48\times3=6\times4\times2\times3=6\times2\times4\times3=2\times6\times4\times3$, y á todos los productos en que se permuten los factores 6, 4, 2 y el 3 sea el factor último. Si se quiere, que lo sea otro de los tres primeros, por ejemplo el 6, como $6\times4\times3=4\times3\times6=12+12+12+12+12+12$, será $6\times4\times3\times2=(12+12+12+12+12+12)\,2=24+24+24+24+24+24=24\times6=2\times3\times4\times6$: luego si el principio es cierto en el producto de tres factores, lo será en el de cuatro: si lo es en el de cuatro, lo será en el de cinco, y asi sucesivamente.

7 Llámase *potencia* de un número el producto de tantos números iguales á él como unidades tiene el índice de la potencia. Asi potencia segunda ó *cuadrado* de 5, que se escribe asi $5^2$, es $5\times5=25$. Potencia tercera ó *cubo* de 5, esto es, $5^3=5\times5\times5=125$: potencia cuarta de 5, ó $5^4=5\times5\times5\times5=625$ etc.

Llámase *raiz* de una cantidad el número que elevado á la potencia del mismo índice que la raiz, produce la cantidad propuesta. Asi la raiz segunda ó cuadrada de 25, que se escribe asi, $\sqrt[2]{25}$, ó $\sqrt{25}$, es 5: porque $5^2=25$. La raiz tercera ó cúbica de 343, que se escribe asi $\sqrt[3]{343}=7$, porque $7^3=343$: $\sqrt[4]{625}=5$, porque $5^4=625$, etc.

Para multiplicar los números *dígitos*, esto es, que no pasan de 9, sirve la tabla siguiente, llamada de multiplicar, en la cual estan formados todos los productos de dichos números.

$2\times2=4, 2\times3=6, 2\times4=8, 2\times5=10, 2\times6=12, 2\times7=14, 2\times8=16, 2\times9=18$
$3\times3=9, 3\times4=12, 3\times5=15, 3\times6=18, 3\times7=21, 3\times8=24, 3\times9=27$
$4\times4=16, 4\times5=20, 4\times6=24, 4\times7=28, 4\times8=32, 4\times9=36$
$5\times5=25, 5\times6=30, 5\times7=35, 5\times8=40, 5\times9=45$
$6\times6=36, 6\times7=42, 6\times8=48, 6\times9=54$
$7\times7=49, 7\times8=56, 7\times9=63$
$8\times8=64, 8\times9=72$
$9\times9=81$

8 Para multiplicar un número que tiene mas de una cifra por otro que tenga una sola cifra, se repite cada clase del primero las veces que indica el segundo; y si hay reserva, se agrega al producto de la clase siguiente.

*Ejemplo.*

$$\begin{array}{r} 8276 \\ 8 \\ \hline 66208 \end{array}$$

Para multiplicar 8276 por 8, digo: $6\times 8=48$: tengo 4 decenas. Digo: $7\times 8=56$ decenas, que con las 4 reservadas componen 60: tengo 6 centenas. Digo: $2\times 8=16$ centenas, y 6 de la reserva son 22, y tengo 2 millares. Digo: $8\times 8=64$, y dos de la reserva son 66.

Si el multiplicador fuere igual á una cifra multiplicada por 10, 100, 1000...., como 40, 400, 4000...., el producto seria el mismo que si se multiplicase el multiplicando, primero por la cifra y despues por 10, 100, 1000.... (6): la segunda multiplicacion se hará, uniendo al producto por la cifra los ceros que la acompañan en el multiplicador (1 *al fin.*) *Ejemplo.* $8276\times 800=8276\times 8\times 100=66208\times 100=6620800$.

Para multiplicar dos números, compuestos cada uno de mas de una cifra, como $5738\times 927$, es preciso repetir el multiplicando tantas veces como unidades espresa cada clase del multiplicador. Multiplíquese, pues, el multiplicando por las unidades del multiplicador (por 7): despues por las unidades que espresa la clase de las decenas (que son 20), lo que se hace multiplicando por la nota 2 de las decenas, y uniendo un cero á la derecha, ó retirando el producto un lugar á la izquierda: despues por las unidades que espresa la clase de las centenas (que son 900), multiplicando por 9 y uniendo dos ceros, ó retirando el producto un lugar mas á la izquierda que el anterior, y asi en las demas clases, como se ve en el ejemplo.

```
   5738
    927
  40166
 11476
51642
5319126
```

Si en medio del multiplicador hay ceros, se omite la multiplicacion por ellos, y el producto de la nota que les anteceda, se atrasará todos los sitios que debian ocupar los ceros.

*Ejemplo.*

```
   47518
    6008
  380144
285108
285488144
```

Se omite la multiplicacion por los dos ceros, y el producto por la nota 6 se retira dos lugares mas.

Si al fin de los dos factores hay ceros, se multiplican las cifras significantes, y al producto se unen tantos ceros como hay al fin de los factores.

*Dem.* Se quiere multiplicar $4500 \times 300$: como $4500 = 45 \times 100$ y $300 = 3 \times 100$, el producto pedido será $45 \times 100 \times 3 \times 100$, ó $45 \times 3 \times 100 \times 100$ (6). El producto $45 \times 3$ es el de las notas significativas; y para multiplicarlo despues por $100 \times 100$, bastará unirle los dos ceros que hay al fin del multiplicando, y los dos que hay al fin del multiplicador. El producto es de 1350000.

Cuando una cantidad debe ser multiplicando muchas veces en una operacion, se forma una tabla de sus productos por las nueve notas, y se copian despues estos productos en sus lugares correspondientes. El producto de cada nota se saca con facilidad, añadiendo el número al producto de la nota anterior. Los productos de una nota par se hallan tambien doblando el de la nota que es su mitad. El producto por 5 se puede hallar uniendo un cero al número y sacando su mitad. El uso enseñará otras muchas abreviaciones en la práctica de la multiplicacion, como las

siguientes: para multiplicar por 15 se añade un cero al multiplicando, se pone debajo la mitad y se suma: para multiplicar por 34 se pone debajo del multiplicando su duplo: debajo de este su duplo, adelantada una nota, y se suma.

Para multiplicar por 11, 12, 13 hasta 19, se pone debajo del multiplicando su producto por las unidades, adelantada una nota, y se suma.

10. *Si uno de los factores se multiplica por un número, el producto quedará multiplicado por el mismo número:* porque si $12=4\times 3$, y el 3 se multiplica por 5, será necesario multiplicar el primer miembro por 5, para que subsista la igualdad, y será $12\times 5=20\times 3$.

*Si uno de los factores se divide por un número, el producto quedará dividido por el mismo número:* porque si $20\times 3=60$, $\frac{20}{5}\times 3=12$, por ser esta operacion inversa de la anterior, que debe reproducir el anterior producto.

*Si uno de los factores se multiplica por un número, y el otro se divide por el mismo número, el producto no se altera*; pues la primer operacion lo multiplica, y la segunda lo divide por el mismo número.

*Cualquier número multiplicado por un dígito ha de tener una reserva menor que el multiplicando*: esto es, si multiplicamos 8 por 9, la reserva ha de ser menor que 8: si multiplicamos 57 por 9, la reserva ha de ser menor que 57.

*Dem.* El producto de 57 por 10 es 570, es decir, 0 de unidades, y 57 de reserva: como el multiplicador 9 es menor que 10, el producto de 57 por 9 no puede llegar á 57 de reserva, mucho mas cuando deberá tener algunas unidades, y el producto de 57 por 10 no tiene ninguna: luego etc. En efecto el producto de 57 por 9 es 513, es decir, 3 unidades y 51 de reserva.

De aqui se infiere que la reserva, aglomerada en las clases superiores del producto por la multiplicacion de las notas inferiores del multiplicando, debe ser siempre menor que el multiplicador: por ejemplo, si multiplicamos 418 por 7, el producto es 2926: en las 29 centenas hay $4\times 7$ y 1 centena, reserva del producto de las decenas. Esta centena agregada con las 2 de-

cenas del producto, compone 12 decenas, que contiene á $1 \times 7$ y 5 decenas, reserva del producto de las unidades. Estas 5 decenas, agregadas con las 6 unidades del producto, componen 56 unidades, producto de $8 \times 7$. Todas las reservas son menores que el 7.

Otro ejemplo. El producto de $532 \times 28$ es 14896. Las 148 centenas se componen de $5 \times 28$ y de 8 centenas, reserva de la multiplicacion de las clases inferiores. Estas 8 centenas y las 9 decenas componen 89 decenas, en las cuales está el producto de $3 \times 28$, y ademas 5 decenas, reserva de la clase inferior. Las 56 unidades que resultan son el producto de $2 \times 28$.

Del mismo modo se podrá descomponer el producto de 1438 por 127, que es 182626. La clase superior $182 = 1.127 + 55$. La reserva es 55.

La clase inferior inmediata $556 = 4.127 + 48$.

La inmediata $482 = 3.127 + 101$.

La inferior $1016 = 8.127$.

Todas las reservas son menores que 127.

11. Cuando existe un número entero, que multiplicado por el divisor, produzca exactamente el dividendo, la division es *exacta*: tal es la de 28 por 7, cuyo cociente exacto es 4.

Pero si no existe un número entero, que multiplicado por el divisor produzca el dividendo, la division es inexacta, como la de 30 por 7, en la que el cociente, ni es 4, porque $4 \times 7 = 28$, y sobran 2 de 30, ni es 5, porque $5 \times 7 = 35$, y le faltan 5 á 30. En este caso se pone en el cociente el mayor número de veces que cabe el divisor en el dividendo, y lo que sobra de este, quitándole el producto de aquel cociente por el divisor, se llama *resto* de la division. Por ejemplo, partiendo 30 por 7, el cociente es 4 y el resto 2.

Este resto indica lo que sobra al dividendo, ó lo que es menester quitarle para que sea divisible exactamente por el divisor; y por eso se llama algunas veces *resto por esceso*. Obsérvese, que puede tomarse por resto de una division, no solo el que ha resultado, sino este sumado con el divisor, añadido una,

dos ó mas veces. El resto de la division de 30 por 7, es, no solo 2, sino $2+7=9$, $2+2\times7=16$, $2+3\times7=23$: porque quitando sucesivamente de 30 los restos 2, 9, 16, 23, resultan 28, 21, 14, 7, que todos se pueden dividir exactamente por 7.

Llámase *resto por defecto* lo que falta al dividendo para que la division sea exacta. Por ejemplo á 30 le faltan 5 para ser divisible exactamente por 7: luego 5 es el resto por defecto de 30 partido por 7. Tambien se puede decir que el resto por defecto de 30 partido por 7 es $5+7=12$, $5+2\times7=19$, $5+3\times7=26$, etc.: pues cualquiera de estos números añadido al 30 dará una suma exactamente divisible por 7.

*El menor resto por defecto y el menor resto por esceso componen el divisor:* porque si 30 contiene al 7 4 veces, y sobran 2, para que lo contenga exactamente una vez mas, es decir, 5 veces, le falta lo que hay del sobrante 2 al divisor 7, es decir 5, que será el resto por defecto; luego etc.

*En toda division inexacta el dividendo es igual al cociente entero, multiplicado por el divisor, añadiendo el resto al producto;* pues el resto es el sobrante que queda del dividendo, deduciendo de él el producto del divisor por el cociente entero.

*El resto menor ha de ser siempre mas pequeño que el divisor;* pues si fuera igual ó mayor que él, el divisor se contendria á lo menos una vez mas en el dividendo.

Un número es *múltiplo de otro* ó *divisible* por otro cuando se puede dividir exactamente por él; y el número que divide exactamente á otro se llama *factor, divisor* ó *parte alicuota* de él. Ejemplo: 35 es múltiplo de 7 y de 5, y es divisible por ambos; y tanto el 5 como el 7 son factores, divisores y partes alicuotas del 35.

Número *par* es todo múltiplo del 2, é *impar* el que no lo es.

Número *primo* es el que no es divisible sino por sí mismo ó por la unidad. Los números primos de la primer centena son estos: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

12. Veamos cómo se debe hacer la particion de un

número, compuesto de muchas notas, por otro de una sola (40761 por 7).

Considerando el dividendo 40761 como el producto del divisor 7 por el cociente incógnito, su especie superior 40 se compone (10) del producto de 7 por la especie superior del cociente, y de la reserva del producto de 7 por la clase inmediata del cociente: y como esta reserva ha de ser menor que 7, se infiere que será el resto *parcial* que deje 40 partido por 7: digo, pues, $\frac{40}{7}$ da 5 de cociente (que será la especie superior del cociente), y 5 de resto que será la reserva de la clase siguiente del dividendo, y lo que falta que partir será 5761.

Haciendo sobre esta cantidad la misma observacion, será 8 la clase segunda del cociente, y 1 la reserva de la inmediata: lo que falta que partir es 161.

La tercera nota del cociente es 2, la reserva de la clase siguiente 2: lo que falta por partir 21, y la última nota del cociente 3.

Véase la forma que se da á la particion.

```
40,7,6,1 |7
 5 7     |5823
  16
   21
```

Esta operacion puede hacerse llevando los restos de memoria, y escribiendo el cociente debajo del dividendo, como se ve en el ejemplo siguiente:

```
50832 |9
 5648
```

Si el divisor tiene mas de una nota, el cociente tendrá ó una nota ó mas de una nota. Tendrá una nota sola cuando sea menor que 10, lo que se conocerá en que uniendo un cero á la derecha del divisor (1) resulte mayor que el dividendo. Asi el cociente de 5342 por 798 no puede tener mas que una nota. Pero si el divisor con el cero unido á la derecha se iguala con el dividendo, ó es mayor que él, el cociente es 10 ó mayor que 10, y tiene mas de una nota.

El cociente de 5342 por 79 ha de tener mas de una nota.

Cuando el cociente ha de tener una sola nota (como en 5342 partido por 798) la clase superior 53 del dividendo debe contener el producto de la nota incógnita por la clase superior 7 del divisor, y la reserva del producto de dicha nota incógnita por la segunda clase 9 del divisor. Si conociésemos esta reserva, quitándola de 53, y partiendo lo que quedase por 7, tendríamos la nota del cociente. Mas como no conocemos la reserva, es preciso examinar por tanteo la nota del cociente. Parto, pues, 53 por 7: el cociente es 7: esta nota será la verdadera, si la reserva 4 que deja es suficiente para cubrir el producto de 7×9.

Si la reserva 4 fuera igual ó mayor que la nota 7 del cociente, estaríamos seguros de que esta nota es buena, y no seria necesario continuar el examen; porque (10) del producto de 7×9 nunca puede resultar una reserva igual al 7, y por tanto seria suficiente la que tendríamos.

Pero como 4 es menor que la nota 7 del cociente, continúo el examen uniendo la reserva 4 á la clase siguiente 4 del dividendo, de la cual es reserva, y compone 44. Comparo esta cantidad con el producto de la nota 7 por la clase siguiente 9 del divisor, y veo que es menor: luego la nota 7 del cociente es demasiado alta.

Bájola, pues, á 6, que me deja de reserva 11, mayor que 6: luego 6 es la verdadera nota del cociente. Multiplícola por todo el divisor, y réstola del dividendo para tener el resto de la particion. La forma de esta operacion es la siguiente:

```
5342 |798
 554  6
```

El cociente entero es 6, y el resto 554.

Mientras la reserva sea menor que la nota del cociente, es necesario continuar el examen con todas las notas del divisor hasta la de las unidades; y la nota

será la verdadera si la última clase del dividendo es mayor que el producto del cociente por las unidades del divisor, ó igual á él, como se ve en el siguiente ejemplo.

40761 | 5823
0000 | 7

Digo: 40 entre 5, á 8. No queda reserva; y como la segunda clase del dividendo 7 es menor que 8 por 8, la nota 8 es demasiado alta. Rebájola á 7: la primer reserva es 5, la segunda clase del dividendo es 57, que deja de reserva 1. La tercera 16 deja de reserva 2. La cuarta 21 es igual al producto $7 \times 3$. La nota 7 es el cociente verdadero.

Si el cociente ha de tener mas de una nota, partiendo la clase superior del dividendo por el divisor, el resto parcial que quede será la reserva de la segunda clase del dividendo. Se forma esta clase, y se repite en ella y en las demas la misma operacion hasta llegar á la última.

*Ejemplo.*

528,9,6,4 | 79
549 | 6695
756
454
59

Siendo 52 menor que 79, tomo una nota mas para formar la clase superior del dividendo, que será 528. Partiéndola por 79, da de cociente 6, y de resto 54, que será la reserva de la segunda clase del dividendo, y esta clase será 549. Su cociente es 6, su resto 75, y la tercer clase es 756. Su cociente es 9, su resto 45, y la última clase es 454: su cociente es 5, y el resto de la particion es 59.

13. *Consecuencias.* 1.ª La division debe empezar por la izquierda, para que los restos parciales den las reservas de las clases inferiores.

2.ª Cada resto debe ser menor que el divisor, porque este resto es la reserva del producto del divisor por la nota inmediatamente inferior del cociente (10), y esta reserva debe ser menor que el divisor.

3.ª Es facil conocer el número de notas de un cociente; porque la clase superior del dividendo debe producir una nota en el cociente; y por cada una de las notas que sigan en el dividendo á su clase superior, se ha de tener una nota en el cociente. El cociente de $\frac{7814}{94}$ ha tener dos notas.

4.ª Ningun cociente parcial puede pasar de 9, porque este es el mayor número de una cifra. Asi, aunque al partir 171 por 19 haya que decir 17 *partido por* 1, no se puede decir que toca mas que á 9.

5.ª *Si el dividendo se multiplica por un número, el cociente quedará multiplicado por el mismo número:* porque si $\frac{24}{4}=6$, será $24=4\times6$ (2); y si el primer miembro de esta ecuacion, que es el dividendo 24, se multiplica por un número, por ejemplo, por 5, será necesario multiplicar el segundo por 5 para que subsista la igualdad: luego $24\times5=4\times6\times5$, ó $24\times5=4\,(6\times5)$, ó $\frac{24\times5}{4}=6\times5$. En efecto, $\frac{120}{4}=30$.

6.ª *Si el dividendo se parte por un número, el cociente quedará dividido por el mismo número:* porque si $\frac{24}{4}=6$, será $24=4\times6$; y si el primer miembro se parte por un número, por ejemplo, por 3, será necesario partir el segundo miembro por 3 para que subsista la igualdad, y será $\frac{24}{3}=\frac{4\times6}{3}$; pero el producto $4\times6$ se parte por 3, partiendo por 3 cualquiera de sus factores (10): luego $\frac{24}{3}=4\times\frac{6}{3}$, ó $8=4\times2$, de donde $\frac{8}{4}=2$: luego etc.

7.ª *Si el divisor se multiplica por un número, el cociente quedará partido por el mismo número:* porque si $\frac{24}{4}=6$, será $24=4\times6$; y si el divisor 4 se multiplica por 3, será necesario partir por 3 el cociente 6, para que el dividendo 24, que ahora es producto, quede el mismo; y será $24=(4\times3)\frac{6}{3}$, de donde $\frac{24}{4\times3}=\frac{6}{3}$. En efecto, $\frac{24}{12}=\frac{6}{3}$.

8.ª *Si el divisor se parte por un número, el co-*

*ciente quedará multiplicado por el mismo número:* porque si $\frac{24}{4}=6$, será $24=4\times6$; y si el divisor 4 se parte por 2, será necesario multiplicar el cociente 6 por 2 para que subsista el mismo dividendo. En efecto $\frac{24}{2}=12=6\times2$.

9.ª *Si dividendo y divisor se multiplican ó parten por un mismo número, el cociente no se altera:* porque si el producto y un factor se multiplican ó parten por un mismo número, el otro factor ha de conservar su mismo valor. Asi, si $\frac{24}{4}=6$, $\frac{24\times2}{4\times2}=6$, y $\frac{24:2}{4:2}=6$. (La espresion 24:2 significa 24 partido por 2.)

De aqui se infiere que si al fin de dividendo y divisor hay ceros, se podrán suprimir en uno y otro igual número de ceros, porque esta supresion equivale á dividirlos ambos por 10, si se ha suprimido un cero, por 100, si se han suprimido dos etc.; y por tanto no se alterará el cociente. Ejemplo: el cociente de $\frac{21600}{600}$ es el mismo que el de $\frac{216}{6}$, que es 36.

10.ª Para tomar la *mitad*, *tercio*, *cuarto* etc. de un número, se dividirá por 2, 3, 4 etc., pues la mitad multiplicada por 2, el tercio por 3 etc. deben reproducir el número.

Cuando un número ha de ser divisor muchas veces, se formarán sus productos por las 9 cifras; y será facil ver cuál es el producto que mas se acerca á cada dividendo parcial: la cifra que le corresponde es la del cociente; y restado dicho producto del dividendo parcial, se tendrá el resto ó reserva para la clase siguiente.

*Ejemplos de division.*

```
721,3,4,2|291      386782,6,7|99887   700200,0,3,1|683679
1393      2478     871216     387     1652103      1024
 2294               721207             2847451
  2572               21998              112735
   244
```

### 3.º *Pruebas de las cuatro reglas.*

14. Para probar si está bien hecha la adicion, vuélvase á sumar, empezando por la columna de la izquierda; y restando esta suma de la que ya tenemos debajo de la misma columna, se tendrá la reserva de la columna siguiente. Repítase en esta y en las demas la misma operacion hasta la columna de las unidades, cuyo resto debe ser cero.

*Ejemplo.* Para probar esta suma, sumo la columna de la izquierda: la suma es 6, que restado de 7 da 1 de reserva, y por tanto la clase que sigue es 13. Sumo la segunda columna: la suma es 11, que restada de 13 da 2, y la clase que sigue es 25. La suma de la tercer columna es 22, que restada de 25 da 3, y la clase siguiente es 35: la suma de las unidades es 35, y por tanto la suma está bien hecha.

```
 2758
 3099
  469
 1029
-----
 7355
 1230
```

Para probar la resta súmese el subtrahendo con el resíduo, y la suma ha de ser igual al minuendo.

Para probar la multiplicacion truéquense los factores, y ha de resultar el mismo producto.

Para probar la division exacta multiplíquese cociente por divisor, y el producto ha de ser igual al dividendo. Para probar la division inexacta multiplíquese el cociente entero por el divisor; añádase al producto el resto, y la suma ha de ser igual al dividendo.

### 4.º *Algunas propiedades de los números enteros.*

15. *Si un producto y sus dos factores se parten por un mismo número, el resto del producto será el producto de los restos de los factores*, esto es, si $24 \times 41 = 984$, partiendo estos tres números por 7, y siendo sus restos respectivos 3, 6, 4, el producto $3 \times 6$ de los restos de los factores será el resto del producto. En efecto $3 \times 6 = 18$, del cual restando 2 veces el 7, queda el resto 4, que es el del producto (11).

*Dem.* Siendo $24=3\times 7+3$, será $24\times 41=(3\times 7+3)41$. El producto de $3\times 7$ multiplicado por 41 es múltiplo de 7, y por tanto no dejará resto alguno si se le parte por 7. Luego si queda algun resto será el que deje $3\times 41$; pero $41=5\times 7+6$: luego $3\times 41=3\,(5\times 7+6)$. El producto de $5\times 7$ por 3 es múltiplo de 7: luego el único resto que habrá será el que deje $6\times 3$, que es el producto de los restos de los factores: luego etc.

De aqui se infiere, que el resto de un producto puede ser, ó el que deja el producto, ó el producto de los restos de los factores, ó el producto de uno de los factores multiplicado por el resto del otro. El resto de 984, que es $24\times 41$, es, ó 4, ó $6\times 3$, ó $3\times 41$, ó $6\times 24$; pues siempre se viene á parar en el resto menor ó *final* 4, quitando de los otros restos los múltiplos de 7 que contienen.

16. *Determinar la ley que siguen entre sí los restos de los números* 1, 10, 100, 1000 *etc.*, *divididos por cualquier número mayor que la unidad.*

El resto de 1, dividido por cualquier número mayor que la unidad, es 1: porque el cociente entero debe ser cero, y queda de resto el dividendo 1.

El resto de 10 es facil de calcular por la division. Asi si el divisor es 7, el resto de 10 es 3.

Como $100=10\times 10$, el resto de 100 es igual al producto del resto de 10 por sí mismo (15), ó al cuadrado del resto de 10.

Como $1000=100\times 10$, el resto de 1000 es igual al resto de 100 multiplicado por el resto de 10; y en general *el resto de cualquier unidad superior es igual al resto de la inmediata inferior multiplicado por el resto de* 10.

*Ejemplo.* Los restos de los números 1, 10, 100, 1000 etc. divididos por 7, son sucesivamente 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5.....

*Determinar el resto, que dejará un número cualquiera partido por otro mayor que la unidad.*

Todo número se puede descomponer en unidades,

decenas, centenas etc. Las primeras estan multiplicadas por 1, las segundas por 10, las terceras por 100 etc. Luego el resto de las unidades (15) será igual al resto de 1 multiplicado por la nota de las unidades: el de las decenas será igual al resto de 10 multiplicado por la nota de las decenas: el de las centenas será igual al resto de 100 multiplicado por la nota de las centenas etc.; y sumando estos restos parciales se tendrá el resto final.

Coloco, pues, debajo de las unidades el resto de 1, debajo de las decenas el resto de 10, debajo de las centenas el resto de 100 etc. Multiplico cada resto por su nota correspondiente, y la suma de los productos será el resto final. Si el resto final es divisible por el divisor, lo será el número propuesto.

*Ejemplo.* Hallar el resto de 3284179 partido por 7. Coloco debajo los restos de 1,
10, 100 etc............................ 1546231
Sumo los productos $1\times9$, $3\times7$, $1\times2$, $4\times6$, $4\times8$, $2\times5$, $1\times3$, quitando á cada uno los 7 que contenga para mayor brevedad; y resulta de resto final $2+2\times3+4+3+3=17$, ó 3, resto del número propuesto partido por 7, como se puede probar efectuando la particion.

Si en lugar de estos restos, que son por esceso, se quisiesen transformar algunos de ellos en restos por defecto (11), se podrá hacer poniendo en lugar de cada resto su diferencia al divisor, que es el correspondiente resto por defecto; y como estos restos deben restarse de los otros, se les señalará con el signo — debajo. Si en el ejemplo anterior hubiésemos querido tomar por defecto los restos de la 4.ª, 5.ª y 6.ª nota, hubiéramos puesto 3284179
$1\underline{231}231$.
Los restos por esceso dan $2+2+3=7$ ó 0.
Los restos por defecto dan $4+3+4=4$ por defecto. Restándole 0, queda de resto final 4 por defecto, que equivale á +3 por esceso, como hallamos en el caso anterior.

*Consecuencias.* 1.ª Todo número, cuya última nota de la derecha es cero ó par, es divisible por 2: porque el resto de 1, dividido por 2, es 1: el de 10 es cero, como tambien los de las demas unidades superiores que son potencias de 10: luego el resto será la nota de las unidades multiplicada por 1. Si dicha nota es cero ó par, el resto final será nulo, y la cantidad divisible por 2.

2.ª Toda cantidad en que el duplo de las decenas sumado con las unidades componga un múltiplo de 4, es divisible por 4: porque los restos de 1 y 10 divididos por 4, son 1, 2: el de 100 y demas unidades superiores es cero: luego el resto de toda la cantidad será el doble de las decenas mas las unidades. Si este resto es divisible por 4, lo será la cantidad.

3.ª Toda cantidad en que el cuadruplo de las centenas, mas el doble de las decenas, mas las unidades, sea un múltiplo de 8, es divisible por 8: porque los restos de 1, 10, 100, divididos por 8, son 1, 2, 4: el de 1000 y demas unidades superiores es cero: luego el resto de toda la cantidad será el cuadruplo de las centenas, mas el doble de las decenas, mas las unidades. Si este resto es divisible por 8, lo será la cantidad.

4.ª Todo número cuyas notas sumen un múltiplo de 3, es divisible por 3: porque el resto de 1, 10, 100, 1000 etc., divididos por 3, es 1: luego el resto de toda la cantidad es la suma de sus notas. Si esta suma es divisible por 3, lo será la cantidad.

5.ª Todo número, cuya última nota de la derecha es 5 ó cero, es divisible por 5; porque el resto de 1 dividido por 5 es 1: el de 10, 100, 1000, etc. es cero: luego el resto de toda la cantidad es la nota de las unidades. Si esta es 5 ó cero, será la cantidad divisible por 5.

6.ª Todo número, cuya última nota es cero, es divisible por 10: porque el resto de 1, dividido por 10, es 1: el de 10, 100, 1000, etc., es cero: luego el resto

de toda la cantidad es la nota de las unidades: si esta nota es cero, será divisible por 10 la cantidad.

7.ª Todo número cuyas notas sumen un múltiplo de 9, es divisible por 9; porque el resto de 1, 10, 100, 1000, etc., divididos por 9, es 1: luego el resto de toda la cantidad es la suma de sus notas. Si esta suma es múltiplo de 9, lo será la cantidad.

8.ª Todo número, cuyas notas sumadas alternativamente, den sumas iguales, ó que se diferencien en 11 ó en un múltiplo de 11, es divisible por 11. Porque los restos de 1, 10, 100, 1000, etc., partidos por 11, son 1, 10, 1, 10, 1, 10..., ó 1, —1, 1, —1, 1, —1, etc.: luego el resto final es la suma de las notas alternativas, empezando desde la unidad, menos la suma de las que se dejaron; si estas dos sumas son iguales, ó se diferencian en 11 ó un múltiplo de 11, el resto final es cero, y la cantidad es divisible por 11.

17. *Todo divisor comun de dos números ha de ser tambien divisor del resto de su particion*: esto es, si 30 y 20 tienen el divisor comun 5, el resto de su particion ha de ser divisible por 5. Porque partiendo 30 por 20, el cociente es 1 y el resto 10: y por tanto $30 = 1 \times 20 + 10$; y quitando de ambos miembros $1 \times 20$, es $10 = 30 - 1 \times 20$: partiendo ambos miembros de esta ecuacion por 5, será $\frac{10}{5} = \frac{30}{5} - \frac{1 \times 20}{5}$: pero $\frac{30}{5}$ es entero, porque 30 se supone divisible por 5: $\frac{1 \times 20}{5}$ es entero, porque 20 se supone tambien divisible por 5, y siéndolo 20, lo debe ser cualquier múltiplo suyo: luego el segundo miembro de la ecuacion es un número entero, pues es la diferencia de dos números enteros: luego el primero lo es tambien, y el resto 10 es divisible por 5: luego etc.

*Buscar el mayor divisor comun de dos números.* Sean los dos números 216 y 36: como el mayor divisor de 36 es el mismo 36, es evidente que si 36 es divisor de 216, será el mayor divisor comun de ambos

números. En efecto $\frac{216}{36}=6$, cociente exacto: luego *deberé partir el mayor número por el menor, y si la division es exacta, el menor será el mayor divisor comun.*

Pero si esta division deja un resto, como en él deben hallarse todos los divisores comunes á ambos números, examinaré si es él el mayor divisor comun, *partiendo el divisor por el resto. Hago lo mismo con los restos* que resulten sucesivamente hasta llegar á una division exacta: su divisor será el mayor divisor comun, no solo de los dos números propuestos, sino de todos los dividendos y divisores anteriores.

Véase la forma que se da á esta operacion. Se pide el mayor divisor comun de 2961 y 799.

| 2961 | 799 | 564 | 235 | 94 | 47 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 63 | 17 | 12 | 5 | 2 | 1 |

Los números 1, 2, 5, 12, 17, 63 representan las veces que cada uno de los números 47, 94, 235, 564, 799, 2961, contienen al mayor divisor comun 47. Estos números se hallan asi.

El mayor divisor comun se contiene á sí mismo 1 vez: por consiguiente el cociente que le corresponde es 1.

El dividendo inmediato 94, partido por 47, dió de cociente 2 en la última division: por tanto 2 es el cociente que le corresponde.

El anterior dividendo $235=2\times 94+47$: partiendo esta ecuacion por 47, será $\frac{235}{47}=2\times\frac{94}{47}+\frac{47}{47}=2\times 2+1$: es decir, para hallar el cociente de 235 por 47, multiplico el cociente 2 de su particion por el cociente 2 del dividendo inferior, y añadiendo el cociente 1 del divisor comun.

Del mismo modo, siendo $564=2\times 235+94$, par-

tiendo por 47, será $\frac{564}{47}=2\times5+2$, donde se observa la misma regla.

*Pongo*, pues, 1 *debajo del último divisor, y el último cociente debajo del último dividendo: multiplico los dos números que hay debajo de este dividendo, y añado el número que está debajo de su divisor, y se tendrá el cociente del dividendo anterior partido por el mayor divisor comun.* La misma operacion se hace hasta llegar al primer dividendo.

1.º Si el mayor divisor comun es 1, quiere decir que los dos números propuestos no tienen mas divisor comun que la unidad; lo que ya sabiamos, pues todo número entero es múltiplo de la unidad: en este caso los dos números se llaman *primos entre sí.*

*Todo número, no divisible por un número primo, es primo con él*: no siendo 20 divisible por 7, 20 y 7 son primos entre sí: porque si 7 no es factor del 20, y 7, por ser primo, no tiene mas factor que 7, el 7 no contendrá ningun factor del 20, y será primo con él: luego etc.

*El producto de dos números, que no son múltiplos de un número primo, no puede ser múltiplo del mismo número primo*: esto es, si 20 y 30 no son múltiplos de 7, el producto $20\times30$ no puede ser múltiplo de 7.

*Dem.* Siendo 20 primo con 7, su mayor divisor comun debe ser 1: hecha, pues, la operacion como se ve,

20 | 7 | 6 | 1 ,
  2   1

resultan de las divisiones las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 20=2\times7+6,\ \text{ó}\ 6=20-2\times7 \\ 7=1\times6+1,\ \text{ó}\ 1=7-1\times6 \end{array}\right\}$$ Multiplicando estas ecuaciones por 30,

será
$$30\times6=20\times30-2\times7\times30$$
$$30\times1=7\times30-1\times6\times30$$

De la primer ecuacion se infiere, que si $20\times30$ es múltiplo de 7, lo debe ser $30\times6$: pues lo es $2\times7\times30$.

De la segunda se infiere, que si lo es $6\times30$, lo ha de ser $30\times1$, pues $7\times30$ lo es; y como siempre se ha

de venir á parar al resto, buscando el mayor divisor comun de 20 y 7, números primos entre sí, se infiere que para que $20 \times 30$ sea múltiplo de 7, es preciso que lo sea 30, contra el supuesto: luego etc.

*Para que un producto sea divisible por un número, es preciso que alguno de sus factores sea divisible por cada uno de los factores primos ó* SIMPLES *del número.* Esto es, para que $15 \times 24$ sea divisible por $30 = 2 \times 3 \times 5$, es preciso que cada uno de estos tres factores simples lo sea del 15 ó del 24: porque si no lo es, por ejemplo el 5, el producto no será divisible por 5, y mucho menos por 30.

*El producto de dos números primos no es divisible sino por estos dos números primos, por sí mismo y por la unidad:* esto es, $5 \times 7$ no es divisible sino por 5, por 7, por 35 y por 1. Porque para que fuese divisible por otro número, por ejemplo, por 6, es necesario que 5 ó 7 fuesen múltiplos de los factores simples del 6: lo que es imposible por ser 5 y 7 números primos.

*Un producto no es divisible por mas factores primos que los que entran en su composicion:* es decir, si $30 = 2 \times 3 \times 5$, 30 no puede ser múltiplo de 11: porque para esto era necesario que alguno de los factores primos 2, 3, 5 fuese múltiplo de 11, lo que es imposible.

*Un número divisible por dos números primos entre sí, es divisible por el producto de ellos*: es decir, si 300 es divisible por 4 y por 25, es divisible por $4 \times 25$, ó por 100. Porque despues de dividido 300 por 4, el cociente 75 ha de ser múltiplo de 25: en efecto $300 = 75 \times 4$; y como 4 y 25 son primos entre sí, 4 no contiene ningun factor del 25, y es menester que 75 sea múltiplo de 25 para que lo sea el producto 300.

19. Para hallar el mayor divisor comun de muchos números, se halla el de dos; despues el del mayor divisor hallado y el tercero; y asi hasta llegar al último número. Para hallar el mayor divisor comun de 150,

90, 40 y 200, busco el de 150 y 90, que es 30: busco el de 30 y 40 que es 10; y en fin, el de 10 y 200, que es 10. Este es el mayor divisor comun de los cuatro números propuestos.

*El cociente de dos números es igual al cociente de los números de veces que comprenden su mayor divisor comun*: porque si 2961 y 799 tienen por mayor divisor comun á 47, y el primero lo contiene 63 veces y el segundo 17, será $2961=47\times63$, y $799=47\times17$: y como dividendo y divisor se pueden partir por un mismo número, sin que se altere el cociente, dividiendo uno y otro por el mayor divisor comun 47, solo tendremos que partir 63 por 17: luego etc.

20. *Buscar los factores simples de un número.* Divídase cuantas veces sea posible con exactitud, por 2; despues por 3, 5, 7.... y demas números primos hasta que resulte de cociente la unidad: la unidad y los divisores anteriores serán los factores primos del número.

*Ejemplo.*

| 360 | 2 |
|---|---|
| 180 | 2 |
| 90 | 2 |
| 45 | 3 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

será $360=1\times2\times2\times2\times3\times3\times5=1\times2^3\times3^2\times5$.

*Hallar todos los factores de un número.* Con las potencias de cada factor simple (escepto la unidad) se forma una serie de *términos*, empezando por la unidad, y siguiendo con las potencias 1.ª, 2.ª, 3.ª etc. del factor hasta aquella á que está elevado en el producto. En el ejemplo anterior, en que hay tres factores simples, formaré las tres series $1, 2, 2^2, 2^3$, ó 1, 2, 4, 8.
$1, 3, 3^2$ ó 1, 3, 9
1, 5 ó 1, 5

Multiplico cada término de la segunda por todos

los de la primera, y tendré 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72.

Multiplico cada término de la tercer serie por todos los de esta; y será 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Continuando la misma operacion con las demas series que se sigan, la última me dará todas las combinaciones posibles de los factores primos, y por tanto (18 al fin) todos los factores del número.

Despues, si se quiere, se colocan en el orden de sus magnitudes asi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

*Otro ejemplo.* Los factores simples de

| | |
|---|---|
| 2310 | 2 dan $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ |
| 1155 | 3 |
| 385 | 5 |
| 77 | 7 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

Formo las series 1, 2 : 1, 3 : 1, 5 : 1, 7 : 1, 11.
Las dos primeras dan 1, 2, 3, 6.
Por la 3.ª.................... 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30.
Por la 4.ª.................... 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210.
Por la 5.ª.................... 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210, 11, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330, 77, 154, 231, 462, 385, 770, 1155, 2310.

Luego los factores de 2310 son: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42, 55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155, 2310.

El número total de factores es igual al producto de los números de términos de todas las series: asi en el primer ejemplo 360 tiene 24 factores; y en el segundo 2310 tiene 32.

*Hallar el menor dividendo comun de varios números*, es decir, el menor número, que es divisible por

varios números dados, como por ejemplo 4, 6, 12, 18, 20, 24 y 25.

1.º No hago caso de los números que son factores de otros, como en el caso presente, del 4, 6, 12, que son factores del 24: porque el número que sea divisible por 24, lo ha de ser por 4, 6, 12.

2.º Descompongo en sus factores simples los que quedan, que son 18, 20, 24 y 25; y tengo $18=2\times3^2$, $20=2^2\times5$, $24=2^3\times3$, $25=5^2$, donde veo que en la composicion de estos números no entran mas factores simples que 2, 3, 5.

3.º Multiplico las mayores potencias de estos factores simples que se encuentren en las descomposiciones: esto es, $2^3\times3^2\times5^2=1800$: este es el menor número divisible por todos los propuestos; porque solo tiene los factores necesarios para ser divisible por cada uno de ellos.

### 5.º *De las fracciones.*

21. Para medir un quebrado (1) se divide la unidad en cierto número de partes iguales, y se ve cuántas de aquellas partes contiene el quebrado. *Denominador* es el número que espresa en cuántas partes se divide la unidad; y *numerador* el que espresa cuántas partes de la unidad dividida contiene el quebrado. Uno y otro se llaman *términos* del quebrado. El quebrado se escribe poniendo el numerador sobre una línea con el denominador debajo de ella, y se lee, leyendo el numerador, y dándole por adjetivo el partitivo del denominador. Asi $\frac{1}{2}$ se lee *un medio:* $\frac{3}{5}$ *tres quintos:* $\frac{4}{13}$ *cuatro treceavos:* $\frac{14}{123}$ *catorce ciento veinte y tres avos:* $\frac{151}{1000}$ *ciento cincuenta y uno milésimos.* Cualquiera de ellos, como por ejemplo $\frac{4}{13}$ significa que dividida la unidad en 13 partes, el quebrado contiene 4 de estas partes; de modo que $\frac{4}{13}=\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}$.

*Todo quebrado es el cociente de su numerador partido por su denominador*, y por eso el quebrado y el cociente se espresan con un mismo signo.

*Dem.* Partir 4 por 13 es lo mismo que partir $1+1+1+1$ por 13: cada unidad partida por 13 da el quebrado $\frac{1}{13}$: luego 4 partido por 13 da $\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{4}{13}$: luego etc.

*Consecuencias.* 1.ª Los restos de las particiones inexactas (11) producen un quebrado, cuyo numerador es el resto, y cuyo denominador es el divisor: este quebrado debe agregarse al cociente entero para tener el cociente completo. Asi $\frac{750}{7}=107\frac{1}{7}$.

2.ª *Todo quebrado*, *cuyo numerador es igual al denominador*, *vale* 1, que es el cociente de dos cantidades iguales: asi $\frac{12}{12}=1$, $\frac{1311}{1311}=1$. Si el *numerador* vale mas que el denominador, el quebrado vale mas que 1, como $\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$. Estos quebrados se llaman *impropios*, porque son mayores que la unidad, á diferencia de los *propios*, que tienen el numerador menor que el denominador, y valen menos que la unidad. El quebrado impropio se reduce á número mixto ó entero, partiendo el numerador por el denominador. Asi $\frac{39}{5}=7\frac{4}{5}$; $\frac{65}{5}=13$.

Recíprocamente un entero se reduce á determinada especie de quebrado, multiplicándolo por el denominador que se le quiere dar; y dándole al producto el mismo denominador, lo que equivale á multiplicar y partir el entero por un mismo número. Asi 13 reducido á quintos es $=\frac{13\times5}{5}=\frac{65}{5}$. El mixto se reduce á la especie de su quebrado, reduciendo el entero á dicha especie, para lo cual se le multiplica por el denominador, añadiendo al producto el numerador, y dando á la suma el mismo denominador del quebrado. Asi $6\frac{2}{7}=\frac{44}{7}$, $12\frac{19}{25}=\frac{319}{25}$. A esta operacion se da tambien el nombre de *incorporacion*.

3.ª A cualquier entero se le puede dar la forma de quebrado poniéndole por denominador la unidad; pues $12=\frac{12}{1}$.

4.ª Pueden aplicarse á los numeradores, denominadores y quebrados todo lo que se ha demostrado

(13 desde 5.º) de dividendos, divisores y cocientes; y por tanto

*Si el numerador se multiplica ó parte por un número, el quebrado quedará multiplicado ó partido por el mismo número.* Asi $\frac{4}{5} \times 6 = \frac{24}{5}$ y $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$.

*Si el denominador se multiplica ó parte por un número, el quebrado quedará partido ó multiplicado por el mismo número.* Asi $\frac{4}{9} : 3 = \frac{4}{27}$, y $\frac{4}{9} \times 3 = \frac{4}{3}$.

*Si los dos términos de un quebrado se multiplican ó parten por un mismo número, el quebrado no se altera.* Asi $\frac{5}{9} = \frac{15}{27}$, y $\frac{40}{64} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

*De donde se infiere, que si dos quebrados tienen un mismo denominador, es mayor el que tenga mayor numerador; y que si dos quebrados tienen un mismo numerador, es mayor el que tenga menor denominador;* pues el quebrado se multiplica multiplicando el numerador, y se divide multiplicando el denominador. Asi $\frac{8}{5}$ es cuadruplo de $\frac{2}{5}$, y $\frac{9}{4}$ es doble de $\frac{9}{2}$.

5.ª *El producto de un quebrado multiplicado por su denominador es igual á su numerador;* pues el cociente multiplicado por el divisor es igual al dividendo. Asi $\frac{4}{7} \times 7 = 4$, $\frac{51}{97} \times 97 = 51$.

22. Para reducir varios quebrados á un mismo denominador, multiplíquense los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los otros: ningun quebrado mudará de valor, y todos tendrán un mismo denominador, que será el producto de todos los dènominadores.

*Ejemplo.* $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{7}$, reducidos á mismo denominador, son respectivamente $\frac{70}{105}, \frac{84}{105}, \frac{45}{105}$.

Esta operacion se abrevia cuando en los denôminadores hay factores comunes, buscando el menor dividendo comun (20 al fin) de todos los denominadores, partiéndolo por el denominador de cada quebrado, y multiplicando por el cociente el numerador. El menor dividendo comun es el denominador.

*Ejemplo. Reducir á un mismo denominador los qnebrados* $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{7}{15}, \frac{5}{8}$. Prescindiendo del 2, factor de 10; de 3, factor de 15, y de 5, factor de 15, descompongo 10, 15, 8, y es 10 = 2

$\times 5$, $15 = 3 \times 5$, y $8 = 2^3$. El menor dividendo comun es $2^3 \times 3 \times 5 = 120$, y los quebrados, reducidos á un mismo denominador, son respectivamente $\frac{60}{120}$, $\frac{40}{120}$, $\frac{96}{120}$, $\frac{36}{120}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{75}{120}$.

Si dos quebrados tienen numeradores y denominadores diferentes, para ver cuál es mayor se reducen á un mismo denominador; y el que asi reducido tenga mayor numerador es mayor. Asi $\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{2}{7}$.

23. *Si dos quebrados son iguales, los productos en cruz de sus términos deben ser iguales;* porque si los quebrados son iguales, reducidos á un comun denominador, deben ser iguales los nuevos numeradores; y como estos son los productos en cruz de ambos quebrados, se infiere que etc. Asi, si $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, será $8 \times 3 = 2 \times 12$.

Recíprocamente, si dos productos son iguales se podrán formar de ellos dos quebrados iguales, siendo los numeradores un factor de cada producto, y los denominadores los dos factores que quedan, pero trocados. Porque si $8 \times 3 = 2 \times 12$, partiendo ambos miembros por el producto $8 \times 2$, resulta $\frac{8 \times 3}{8 \times 2} = \frac{2 \times 12}{8 \times 2}$. Dividiendo (21, 4.ª) los términos del primer quebrado por 8, y los del segundo por 2, es $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$. Del mismo modo se demuestra que $\frac{3}{12} = \frac{2}{8}$, $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

24. Para reducir una fraccion á sus menores términos se dividen sus dos términos por su mayor divisor comun (18). Tambien se puede reducir dividiendo ambos términos sucesivamente por todos los factores comunes que tengan.

*Ejemplo.*

$\frac{648}{1080} = \frac{3}{5}$, porque él mayor divisor comun es 216.

Por partes alicuotas: $\frac{648}{1080} = \frac{324}{540} = \frac{162}{270} = \frac{81}{135} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Una fraccion cuyos dos términos son primos entre sí, es *irreductible*: porque si se dice que $\frac{33}{40}$ se reduce á $\frac{3}{4}$, será (23), $33 \times 4 = 3 \times 40$: como el segundo miembro es divisible por 40, lo será el primero, y como el 4 es menor que 40, será necesario que alguno de los factores primos de 40 sea factor de 33,

(18), lo que no puede ser: porque 40 y 33 se suponen primos entre sí.

*Si una fraccion irreductible es igual á otra, los términos de esta han de ser múltiplos de los correspondientes de la irreductible*: porque si $\frac{4}{9}=\frac{8}{18}$, será $4\times18=8\times9$. El segundo miembro de esta ecuacion es divisible por 9: luego tambien el primero: y no conteniendo el 4 ningun factor del 9, porque es primo con él, será preciso que 18 sea múltiplo de 9. Tambien el primer miembro es divisible por 4: luego el segundo lo debe ser; y no teniendo 9 ningun factor del 4, es preciso que 8 sea múltiplo del 4: luego etc.

24. *Si dos quebrados son iguales, sumando ó restando sus numeradores y denominadores ha de resultar un quebrado igual á cualquiera de ellos*: esto es, si $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$, $\frac{4+8}{6+12}=\frac{4}{6}$, y $\frac{8-4}{12-6}=\frac{4}{6}$.

*Dem.* Si $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$, (23) $4\times12=6\times8$. Añadiendo ó restando á ambos miembros el producto $4\times6$, resulta $4\times12+4\times6=6\times8+4\times6$, ó $4\times12-4\times6=6\times8-4\times6$. *Separando* en cada miembro el *factor comun*, es $4(12+6)=6(8+4)$, y $4(12-6)=6(8-4)$: de donde $\frac{4}{6}=\frac{8+4}{12+6}$ y $\frac{4}{6}=\frac{8-4}{12-6}$: luego etc.

*Si dos quebrados son iguales, las sumas ó restas de sus términos forman un quebrado igual al que forman sus numeradores ó denominadores*; esto es, si $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$, $\frac{4+6}{8+12}=\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$, y $\frac{6-4}{12-8}=\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$.

*Dem.* En primer lugar: si $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$, será $4\times12=6\times8$, de donde se sacará $\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$.

Siendo $4\times12=6\times8$, añadiendo ó restando á ambos miembros $4\times8$, será $4\times12+4\times8=6\times8+4\times8$, ó $4\times12-4\times8=6\times8-4\times8$. Separando en cada miembro el factor comun, será $4(12+8)=8(6+4)$, y $4(12-8)=8(6-4)$, de donde $\frac{4}{8}=\frac{6+4}{12+8}$, y $\frac{4}{8}=\frac{6-4}{12-8}$; luego etc.

## 6.° *Operaciones aritméticas con los quebrados.*

25. Para sumar los quebrados, se reducen á un mismo denominador, si lo tienen diverso, se suman los nuevos numeradores, y se da á la suma el denominador comun.

*Ejemplo.* $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{1}{3}=\frac{63}{105}+\frac{30}{105}+\frac{35}{105}=\frac{128}{105}=1\frac{23}{105}$.

Para sumar los mixtos, se suman los quebrados; y si de su suma resulta algun entero, se añade á la suma de los enteros. *Ejemplo*: $3\frac{1}{2}+5\frac{3}{4}=9\frac{1}{4}$: porque $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$.

Para restar los quebrados, se reducen á un mismo denominador, si lo tienen diverso, se restan los nuevos numeradores, y se da al resíduo el denominador comun. *Ejemplo*: $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}$.

Para restar los mixtos, se resta quebrado de quebrado y entero de entero. Si el quebrado del subtrahendo es mayor que el del minuendo, se añade á este una unidad, añadiendo á su numerador su denominador, y otra al entero del subtrahendo. *Ejemplo*: $3\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$. *Otro*: $3\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$. *Otro*: $142-135\frac{4}{9}=6\frac{5}{9}$, suponiendo en el minuendo el quebrado $\frac{9}{9}$.

*Otros.* $142-\frac{3}{5}=141\frac{2}{5}$: $47\frac{2}{3}-30=17\frac{2}{3}$: $63\frac{2}{5}-\frac{4}{7}=62\frac{29}{35}$.

26. Para multiplicar un quebrado por un entero, ó multiplico el numerador por el entero, ó parto el denominador por el entero, si esta division es exacta: porque el quebrado (21) se multiplica, multiplicando el numerador ó dividiendo el denominador. *Ejemplos.* $\frac{3}{4}\times 5=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$: $\frac{19}{24}\times 12=\frac{19}{2}=9\frac{1}{2}$.

Para partir un quebrado por un entero, ó se parte el numerador por el entero, si esta division es exacta, ó se multiplica el denominador por el entero: porque el quebrado (21) se divide, dividiendo el numerador ó multiplicando el denominador. *Ejemplos.* $\frac{15}{11}:5=\frac{3}{11}$; $\frac{3}{4}:5=\frac{3}{20}$.

Para tomar de un número, sea entero, quebra-

do ó mixto, las partes que indica una fraccion propia, como por ejemplo, los $\frac{4}{5}$, se toma la quinta parte del número, y despues se multiplica por 4 esta quinta parte. Por ejemplo, los $\frac{4}{5}$ de 40 son 32. Los $\frac{3}{7}$ de 40 son $\frac{120}{7} = 17\frac{1}{7}$.

Esta operacion se llama *multiplicar por un quebrado*, dándole cierta estension á la palabra *multiplicar*, y entendiendo por *multiplicacion*, no solo repetir un número las veces que indica otro, sino tambien rebajar un número á aquella parte de sí mismo, que otro es de la unidad. Así multiplicar 40 por $\frac{4}{5}$, será rebajar el 40 á sus cuatro quintas partes, del mismo modo que $\frac{4}{5}$ son las cuatro quintas partes de la unidad. Esta latitud que se da á la palabra *multiplicar*, no tiene inconveniente, siempre que quede bien entendido lo que quiere decir *multiplicar por un quebrado*, y tiene una grande utilidad; porque simplifica el lenguage en el uso comun de la multiplicacion. Supongamos, por ejemplo, que se quiera averiguar el valor de $8\frac{3}{4}$ varas de paño, valiendo cada vara 100 reales vellon. Es evidente que deberé repetir los 100 reales vellon 8 veces: y al producto 800 añadir los $\frac{3}{4}$ de 100, valor de las $\frac{3}{4}$. Estas dos operaciones las espresamos con un solo signo, diciendo, que el valor de las $8\frac{3}{4}$ es $100 \times 8\frac{3}{4}$: porque aunque la operacion de multiplicar por 8, y la de multiplicar por $\frac{3}{4}$ sean diferentes, tienen sin embargo un mismo objeto.

El producto de un número por un quebrado propio es menor que el multiplicando; pues la multiplicacion por un quebrado propio tiene por objeto tomar una parte del multiplicando.

*Para multiplicar dos quebrados, se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.*

*Dem.* Multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{7}$, es tomar los $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$, ó multiplicar por 3 la séptima parte de $\frac{4}{5}$ que es $\frac{4}{35}$: luego el producto es $\frac{12}{35}$: luego etc.

Para multiplicar los mixtos, se reducen á quebrados, y se multiplican como quebrados: ó bien se mul-

tiplica entero por entero, cada entero por el quebrado del otro, y quebrado por quebrado, y despues se suman estos productos parciales.

*Ejemplo.*

$45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3} = \frac{183}{4} \times \frac{53}{3} = \frac{61}{4} \times 53 = \frac{3233}{4} = 808\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{r} 45\frac{3}{4} \\ 17\frac{2}{3} \\ \hline 315 \\ 45\phantom{0} \\ 30 \\ 12\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \hline 808\frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Multiplico primero 45 por 17: despues 45 por $\frac{2}{3}$ que equivale á multiplicar $15 \times 2 = 30$. Despues $17 \times \frac{3}{4} = \frac{51}{4} = 12\frac{3}{4}$. Despues $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ que produce $\frac{1}{2}$. Despues se suma y se tiene el producto total.

27. Para partir los quebrados, se multiplican en cruz.

*Dem.* Háyase de partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{7}$: multiplicando por 7 dividendo y divisor, no se altera el cociente y la particion se reduce á $\frac{28}{5} : 3 = \frac{28}{15}$: luego etc.

*Ejemplos.*

$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$ | $8 : \frac{3}{5} = \frac{8}{1} : \frac{3}{5} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$

$\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ | $\frac{18}{19} : \frac{9}{38} = \frac{2}{1} : \frac{1}{2} = 4$.

Para partir los mixtos, se reducen á quebrados: asi $2\frac{1}{3} : 4\frac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{19}{4} = \frac{28}{57}$.

Cuando el divisor es menor que la unidad, el cociente es mayor que el dividendo; porque cuando el divisor es 1, el cociente es igual al dividendo.

## 7.º *Quebrados decimales.*

28. Quebrados decimales son los que tienen por denominador á 10, 100, 1000, etc. Estos quebrados pueden escribirse sin denominador, poniendo los numeradores á la derecha de la clase de las unidades, separados de ella con una vírgula, y estendiendo á las clases decimales la ley de los enteros «que cada nota sea diez veces menor por cada lugar que se adelanta á la derecha», se colocarán sucesivamente despues de la

vírgula las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, etc. Asi 3, 3 = $3\frac{3}{10} = \frac{33}{10}$; 42, 05 = $42\frac{5}{100} = \frac{4205}{100}$; 0, 403 = $\frac{403}{1000}$.

Para leer una fraccion decimal, se lee como si fuera entera, añadiendo al fin la denominacion del último guarismo; 8, 701201 se lee 8 enteros, y 701201 millonésimas.

Para escribir una cantidad decimal, se escribe despues de la vírgula, y se interponen entre esta y la cantidad los ceros necesarios para que haya tantas cifras decimales como ceros tiene el denominador. Asi $\frac{33}{10000}$ = 0,0033; 1000 $\frac{4}{100}$ = 1000, 04; $\frac{13000}{1000000000}$ = 0,00013000.

Toda cantidad decimal tiene por denominador implícito á la unidad con tantos ceros como cifras tiene la cantidad.

Una cantidad decimal no se altera, porque se unan ceros á su derecha: pues añadiéndose otros tantos ceros al denominador implícito que tiene, se aumentan en igual razon los dos términos del quebrado.

Si la vírgula de una cantidad decimal se mueve de la izquierda á la derecha, se hace la cantidad 10 veces mayor por cada lugar que adelante la coma: pues cada clase de la cantidad se retira un lugar á la izquierda. Al contrario, si la coma se mueve de la derecha á la izquierda, se hace la cantidad 10 veces menor por cada lugar que atrase la vírgula. *Ejemplo.* $342{,}53 \times 10 = 3425{,}3$; $\frac{342{,}53}{100} = 3{,}4253$.

29. Para sumar las cantidades decimales se ponen unas debajo de otras con la correspondencia de sus clases, y se suman como enteros, colocando la vírgula delante de la suma de las unidades.

*Ejemplo.*

| | |
|---|---|
| 4852,791<br>4,00745<br>2,7<br>0,049.<br>4859,54745 | De la suma de las décimas (que es 15), paso la reserva 1 á la clase de las unidades, y pongo delante la coma. |

Para restar los decimales, coloco el subtrahendo debajo del minuendo, y resto como en los enteros, colocando la vírgula delante de las unidades. Si el minuendo tiene menos notas que el subtrahendo, se le unen á la derecha los ceros necesarios para que haya las mismas notas en uno que en otro.

*Ejemplo.*

| | |
|---|---|
| 3,842000 | He unido tres ceros al minuendo para |
| 1,004554 | igualar el número de notas decimales en |
| 2,837446 | minuendo y subtrahendo. |

Para multiplicar decimales, se multiplican como enteros, y al producto se separan tantas notas para decimales, como decimales hay en ambos factores.

*Dem.* Queremos multiplicar 43,7 por 3,91. El factor $43,7=\frac{437}{10}$: y $3,91=\frac{391}{100}$: debemos, pues, multiplicar $\frac{437}{10}\times\frac{391}{100}$. Los numeradores multiplicados entre sí dan el producto 170867, que es el de las dos cantidades consideradas como enteras. El producto de los denominadores es 1000, y debe tener tantos ceros como notas decimales hay en los dos factores: luego el producto de las dos fracciones, que es $\frac{170867}{1000}$, si lo quiero escribir como quebrado decimal, debo separarle al numerador tantas notas para decimales, como hay en ambos factores, y será el producto 170,867.

*Otro ejemplo*: $2,4542\times0,0053=0,01300726$.

Para partir los decimales, redúzcolos á un mismo denominador, haciendo igual en ambos el número de notas decimales, y parto despues los numeradores, es decir, las dos cantidades consideradas como enteras.

*Ejemplo.*

$$\frac{8,445}{3,22}=\frac{8,445}{3,220}=\frac{8,445}{3220}=2\ \frac{2005}{3220}=2\ \frac{401}{644}$$

*Otros.*

$$\frac{49,1}{20,074}=\frac{49100}{20074}=2\,\frac{8952}{20074}=2\,\frac{4476}{10037}$$

$$\frac{57}{4,039}=\frac{57000}{4039}=14\,\frac{454}{4039}$$

Cuando el divisor es entero, se hace la particion como en los enteros, colocando la vírgula delante del cociente de la clase de las unidades. Asi $\frac{4,028}{7}=0,575$.

El último resto se desprecia comunmente: $\frac{0,0324}{52}=0,0006$; $\frac{42,5}{13}=3,2$.

8.° *Aproximaciones y periodos.*

30. Aproximarse á una fraccion en menos de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, ó $\frac{1}{7}$ etc. es hallar una fraccion mas sencilla, que se le diferencie en menos de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{7}$ etc. Para esto se multiplica el numerador por el denominador 3, 5, 7, etc. de la aproximacion; y partiendo el producto por el denominador del quebrado, el número entero que resulte será el numerador de la fraccion aproximada, y el denominador será 3, 5 ó 7, segun el grado de aproximacion.

Porque sea la fraccion $\frac{427}{680}$, y quiero aproximarme á ella en menos de $\frac{1}{8}$. Multiplicando la fraccion por 8, y poniéndole 8 por denominador, quedará la misma en esta forma: $\frac{\frac{3416}{680}}{8}$. El numerador $\frac{3416}{680}$ está entre 5 y 6: luego la fraccion propuesta está entre $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$: luego $\frac{5}{8}$ se diferencia de la fraccion propuesta en menos de $\frac{1}{8}$.

Luego para aproximar una fraccion en menos de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc, se multiplicará el numerador por 10, 100, 1000 etc., y se partirá el producto por el denominador. En la práctica se añade un cero al numerador y á los restos que van quedando, y se parte el producto por el denominador, hasta la concurrencia de los decimales que se piden en la aproximacion. Asi $\frac{25}{7}=$

3,5714 aproximado hasta las diezmilésimas, ó aproximado en menos de una diezmilésima.

31. Una fraccion es convertible exactamente en decimales, cuando los factores simples del denominador son 2 ó 5 solamente, y el número de decimales será igual al grado de la mayor potencia de 2 ó 5: porque sea el denominador 200, ó $2^3 \cdot 5^2$. Si multiplico el numerador por $10^3$ ó 1000 para reducir el quebrado á milésimas, como $10^3$ es divisible por $2^3 \cdot 5^2$, resultará por numerador un cociente exacto, que llegará á milésimas, ó tendrá tres notas decimales. Asi $\frac{3}{200} = 0,015$.

Si en el denominador hay algun factor, que no sea 2 ó 5, como los números 10, 100, 1000 etc., por los cuales se multiplica el numerador, no son divisibles sino por 2 ó 5, jamás podrá tener el quebrado espresion exacta en decimales. Como los restos que se van obteniendo deben ser menores que el divisor, al cabo de tantas divisiones por lo menos, como unidades menos una tiene el divisor, se habrá repetido alguno de los restos anteriores; y por tanto desde él volverán en el cociente las mismas notas decimales que se llaman *periodo*, porque se repiten periódica é indefinidamente. Asi $\frac{4}{7} = 0,571428571428571428...\frac{1}{37} = 0,027027...$ $\frac{1}{13} = 0,076923076923..\frac{1}{41} = 0,0243902439....$

32. La fraccion, de donde ha procedido un periodo decimal, que empieza desde la vírgula, es igual al periodo dividido por una cantidad compuesta de tantos 9, como notas tiene el periodo.

*Dem.* Si el periodo consta de sola una nota (como 0, 777777), sabiéndose que $\frac{1}{9} = 0, 111111$, el periodo propuesto vendrá de $\frac{7}{9}$.

Si el periodo consta de dos notas (como 0,636363...) como $\frac{1}{99}$ reducido á decimal es 0, 010101, el periodo propuesto procederá de $\frac{63}{99}$ ó $\frac{7}{11}$. La misma demostracion se estiende á los periodos de 3 notas, de 4, de 5 etc. Asi el periodo 0,571428571428 procede de $\frac{571428}{999999}$, que se reduce á $\frac{4}{7}$.

De aqui se infiere, que los periodos que empiezan desde la vírgula, proceden de fracciones, en cuyo denominador no entran como factores ni el 2 ni el 5.

Si el periodo no empieza desde la vírgula, se escribirá como si fuese completo, es decir, como si empezase desde las décimas, se hallará la fraccion comun á que corresponde, y se añadirá á esta ó se restará la diferencia entre el periodo propuesto y el periodo completo, segun que el 1.º sea mayor ó menor que el 2.º

*Ejemplo.* El periodo incompleto, sea 0,58333.. Hecho com-

pleto es o, 33333 . . $=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$: su diferencia con el propuesto es o, 25 $=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$, que añadido á $\frac{1}{3}$, por ser el periodo completo menor que el propuesto, es $\frac{7}{12}$.

*Otro.* El periodo propuesto sea o, 21333 . . El completo es o, 33333 $=\frac{1}{3}$: réstole la diferencia o, 12 $=\frac{3}{25}$, y tendré la fraccion generatriz $\frac{16}{75}$.

*Otro.* Sea el periodo 5, 4565656 . . El completo es o, 6565 . . que procede de $\frac{65}{99}$. La diferencia es 4, 8 $=\frac{24}{5}$: luego la fraccion pedida es $\frac{65}{99}+\frac{24}{5}=\frac{2701}{495}$.

33. Todo periodo incompleto tiene en el denominador de la fraccion de donde procede tantos factores iguales á 2 ó á 5, como notas anteceden desde la vírgula al periodo.

*Dem.* El periodo incompleto procede de la suma ó diferencia de dos quebrados, cuyos denominadores son, el del uno una cantidad compuesta de tantos 9 como notas tiene el periodo; y el del otro es la unidad con tantos ceros como notas anteceden al periodo, como se ve en el periodo o, 21333 que procede de $\frac{3}{9}-\frac{12}{100}$: luego el comun denominador (en el ejemplo presente es 900) que será el de la fraccion comun, á que se reduce la decimal propuesta, debe tener á 10 por factor tantas veces como notas anteceden al periodo, y por tanto la mayor potencia del 10, que será la del 2 ó del 5, contenida en dicho denominador, indicará el número de notas que anteceden al periodo. Asi la fraccion $\frac{7}{30}=\frac{7}{2.5.3}$, reducida á decimal, tendrá una nota antes del periodo, porque en su denominador es 1 la mayor potencia á que estan elevados el 2 y el 5.

34. Cuando en el producto de dos cantidades decimales no se quiere tanta aproximacion, como se tendria haciendo la multiplicacion por la regla general, se observará el método siguiente:

1.° Márquese con un punto encima la nota del multiplicando inferior á aquella en que se quiere la aproximacion. (En el ejemplo de enfrente, si se quiere la aproximacion hasta las centésimas, póngase el punto sobre las milésimas).

```
       93,4528
       23,4277
    ----------
      280 356
     1869 056
       37 380
        1 868
          651
           63
    ----------
     2189, 37.
```

2.º Multiplíquense las unidades del multiplicador por todo el multiplicando, empezando desde la nota marcada: las décimas del multiplicador, empezando desde la nota inmediatamente superior á la marcada: las centésimas desde la que sigue superior, y asi hasta la última. Todos estos productos pertenecerán á una misma clase decimal, pues de cada vez bajo una clase en el multiplicador y subo otra en el multiplicando.

3.º Si hay decenas en el multiplicador, estas se multiplicarán por la nota inmediatamente inferior á la marcada: si hay centenas, por la que sigue inferior etc.; para esto se aumentarán ceros á la derecha del multiplicando, si no tiene bastantes cifras. De este modo todos los productos pertenecerán á una misma clase decimal, y deberán empezarse á escribir unos debajo de otros.

4.º Hecha la suma, despreciese la última nota de la derecha: pero si pasa de 5, añádase una unidad á la última que queda: de este modo se cometerá menos error: porque si dicha nota es 8, como con respecto á la clase anterior son décimas, menos error es añadir $\frac{2}{10}$ á la clase anterior, que quitarle $\frac{8}{10}$.

5.º La vírgula se pondrá debajo de la del multiplicando.

35. Para aproximar en decimales un cociente, en vez de unir un cero al resíduo, se desprecia la última nota del divisor. El error que produce este método no recae sino sobre la clase inferior del cociente.

*Ejemplo.*

Se pide en enteros y decimales el valor de $\frac{3203281}{34277}$

```
               38
3203281.  | 34277
          ---------
 118351     93, 4528
  15520
  . 1808
  . . 93
      25
```

Cuando tengo el resíduo 15520, desprecio la nota 7 del divisor, y como pasa de 5, convierto la anterior en 8; y asi de las demas.

### 9.º *Números complejos.*

36. Llámase número *abstracto*, aquel en que solo se considera el número de unidades que contiene, y se prescinde del tamaño ó especie de la unidad. Por

ejemplo, si decimos $5+4=9$, el 5, el 4 y el 9 son números abstractos: porque sean varas, libras ó onzas, siempre se verifica que $5+4=9$.

Número *concreto* es el que se refiere á una unidad definida en cuanto á su tamaño ó especie. Por ejemplo, 5 varas, que es verdaderamente el producto de 1 vara multiplicada por 5, número abstracto.

Obsérvese que en toda multiplicacion *el multiplicador es un número abstracto;* pues sirviendo solo para denotar las veces que se ha de repetir el multiplicando, no hay que atender á su especie, sino al número de sus unidades. Asi es locucion inexacta decir, que para hallar el valor de 48 varas de paño á 100 reales cada una, *se han de multiplicar* 100 *reales por* 48 *varas.* Se debe decir que es necesario *multiplicar* 100 *reales por* 48, número abstracto. Y en efecto, si en lugar de ser 100 reales el valor de una vara de paño, lo fuese por ejemplo de un cordero, para hallar el valor de 48 corderos tendriamos que multiplicar tambien 100 reales por 48, y el producto sería el mismo en ambos casos, 4800 reales: luego la especie del multiplicador no influye en el producto.

En el comercio, las artes y las ciencias se han adoptado varias unidades de todas especies, de diferentes tamaños en cada especie; para proporcionarlas á los tamaños de las cantidades que se han de medir, de modo que no resulten números demasiado grandes, ni fracciones demasiado pequeñas.

Las medidas españolas mas usuales son: para las longitudes, la vara que tiene tres pies, el pie que tiene 12 pulgadas, la pulgada que tiene 12 líneas, y la línea que tiene 12 puntos. Sus relaciones son las siguientes:

1 vara = 3 pies = 36 pulgadas = 432 líneas = 5184 puntos.

$1^{P} = \frac{1}{3}^{v} = 12^{p} = 144^{lin.} = 1728^{pun.}$

$1^{p} = \frac{1}{36}^{v} = \frac{1}{12}^{P} = 12^{lin.} = 144^{pun.}$

$1^{lin.} = \frac{1}{432}^{v} = \frac{1}{144}^{P} = \frac{1}{12}^{p} = 12^{pun.}$

$1^{pun.} = \frac{1}{5184}^{v} = \frac{1}{1728}^{P} = \frac{1}{144}^{p} = \frac{1}{12}^{lin.}$

Para los pesos, la libra que tiene 2 marcos, el marco que tiene 8 onzas, la onza que tiene 16 adarmes. Sus relaciones son las siguientes:

$1^{lib.} = 2^{mc.} = 16^{on.} = 256^{ad.}$

$1^{mc} = \frac{1}{2}^{lib.} = 8^{on.} = 128^{ad.}$

$1^{on.} = \frac{1}{16}^{lib.} = \frac{1}{8}^{mc.} = 16^{ad.}$
$1^{ad.} = \frac{1}{256}^{lib.} = \frac{1}{128}^{mc.} = \frac{1}{16}^{on.}$

Para el tiempo, el dia que tiene 24 horas, la hora que tiene 60 minutos, y el minuto que tiene 60 segundos. Sus relaciones son la siguientes:

$1^{d} = 24^{h.} = 1440' = 86400''$
$1^{h} = \frac{1}{24}^{d.} = 60' = 3600''$
$1' = \frac{1}{1440}^{d.} = \frac{1}{60}^{h.} = 60''$
$1'' = \frac{1}{86400}^{d.} = \frac{1}{3600}^{h.} = \frac{1}{60}'$.

Para el dinero, el duro que tiene 20 reales, y el real que tiene 34 maravedis. Las relaciones son las siguientes:

$1^{du.} = 20^{rs.} = 680^{mrs.}$
$1^{r.} = \frac{1}{20}^{du.} = 34^{mrs.}$
$1^{mr.} = \frac{1}{680}^{du.} = \frac{1}{34}^{r.}$ (Véase el *apéndice* al fin de la Geom.)

Números *complejos* son números concretos, compuestos de diferentes partes referidas á unidades de diferentes tamaños, pero de una misma especie, como $4^{du.}\ 6^{rs.}\ 7^{mrs.}$, $9^{d}\ 8^{h}\ 40'$, $6^{v}\ 1^{p}\ 7^{ps.}$

Por consiguiente el número complejo no es mas que un número mixto ó fraccionario: por ejemplo, $9^{d}\ 8^{h}\ 40' = 9^{d} + \frac{8}{24} + \frac{40}{1440}$, que efectuando la incorporacion y la suma (21 y 25) $\frac{12960+480+40}{1440}$ $= \frac{13480}{1440} = \frac{337}{36}^{d}$. Esta operacion se llama *reducir el número complejo á quebrado de su especie superior*, y se hace reduciendo todo el número á su denominacion inferior, y dándole por denominador una unidad de su denominacion superior reducida á la inferior.

Los números complejos se pueden calcular por las reglas de los quebrados, pues se pueden reducir á quebrados. Tambien se pueden calcular por las reglas de los decimales, reduciéndolos á quebrados y estos á decimales: es verdad que en este caso los resultados no serian ordinariamente mas que aproximados; pero como está al arbitrio del calculador el grado de esta aproximacion, se puede siempre hacer que el error de esta especie de cálculos sea despreciable.

Es facil valuar un quebrado comun de unidad superior en sus partes inferiores, porque si $\frac{4}{9}^{du.}$ es lo mismo que $4^{du.}$ partidos por 9 (21), reduciendo los duros á reales se podrá hacer la particion, y será $\frac{4}{9}^{du.} = 8^{rs.}\ \frac{8}{9}$. Estos $\frac{8}{9}^{rs.}$ componen $\frac{272}{9}^{mrs.} = 30\ \frac{2}{9}\ ^{mrs.}$: luego $\frac{4}{9}^{du.} = 8^{rs.}\ 30\frac{2}{9}^{mrs.}$ Esto se llama reducir los quebrados á complejos.

Del mismo modo se podrian reducir los decimales tomando el entero para la especie superior. Asi $3^v, 42 = 3^v\ 1^P\ 3^p, 12$.

Sin embargo como es mas facil algunas veces calcular los números complejos bajo su forma propia, se dan la siguientes reglas para efectuar con ellos las operaciones aritméticas.

37. Para sumarlos ó restarlos se escriben unos debajo de otros, poniendo en columna las partes de una misma denominacion, y sumando ó restando despues, empezando por la especie inferior. Si la suma de una columna contiene una ó mas unidades de la denominacion siguiente, se reservan para añadirla á ella. Si el subtrahendo parcial es menor que su correspondiente minuendo, se le añade á este una unidad de la denominacion superior inmediata, y para compensarla se añade otra al subtrahendo de dicha denominacion superior.

*Ejemplos de sumar.*

| $154^v$ | $2^P$ | $7^p$ | $9^{li}\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 8 | $11\frac{5}{6}$ |
| 132 | 2 | 10 | $3\frac{1}{3}$ |
| 20 | 2 | 7 | 1 |
| 332 | 1 | 10 | $1\frac{2}{3}$ |

| $322^{du.}$ | $17^{rs.}$ | $5^{mrs.}$ |
|---|---|---|
| 43 | 11 | 7 |
| 7 | 8 | 4 |
| 18 | 2 | 30 |
| 43 | 16 | 32 |
| 435 | 16 | 10 |

*Ejemplos de restar.*

| $32^{lb.}$ | $1^{mc.}$ | $1^{on.}$ | $15^{a.}$ |
|---|---|---|---|
| 17 | 1 | 7 | 7 |
| 14 | 1 | 2 | 8 |

| $487^{d.}$ | $0^{hs}$ | $0'$ | $0''$ |
|---|---|---|---|
| 18 | 4 | 30 | 54 |
| 468 | 19 | 29 | 6 |

*Otros ejemplos de restar.* Descartes nació en 3 de abril de 1596, y murió en 11 de febrero de 1650. Pascal nació en 19 de junio de 1623, y murió en 19 de agosto de 1662. Newton nació en 15 de diciembre de 1642, y murió en 18 de marzo de 1727. Se pregunta

cuánto tiempo vivió cada uno de estos insignes matemáticos.

38. La multiplicacion de los números complejos consiste en valuar cada una de las partes del multiplicador, suponiendo que todo el multiplicando es valor de una unidad de la denominacion superior del multiplicador. Asi que, como ya hemos indicado (36), jamas se debe proceder á la multiplicacion de números complejos, sin que antes se proponga con toda claridad la cuestion que da lugar á esta multiplicacion. Por ejemplo, si se nos dice que multipliquemos $6^{du.}\ 8^{rs.}\ 10^{mrs.}$ por $4^{v}\ 2^{P}\ 8^{p}$, no lo haremos sin que antes se nos esplique con qué objeto se ha de hacer esta multiplicacion. Porque si es para valuar las $4^{v}\ 2^{P}\ 8^{p}$ en la inteligencia de que cada vara vale el dinero que espresa el multiplicando, en este caso el multiplicador es $4+\frac{2}{3}+\frac{8}{36}$. Pero si el multiplicando fuese el valor de un pie, el multiplicador seria $14+\frac{8}{12}$, que es el número de pies contenido en $4^{v}\ 2^{P}\ 8^{p}$. Esto quiere decir, que las espresiones de *multiplicar* y *partir complejos* son impropias, y solo se adoptan por su brevedad; pero en la práctica se debe atender á la propuesta de la cuestion para dirigir bien el cálculo.

Si el multiplicador es un número entero se multiplica por él cada denominacion del multiplicando.

*Ejemplos.* 1.º ¿Cuánto valen 7 libras de un género á razon de $57^{du.}\ 5^{rs.}\ 4^{mrs.}$ la libra? El multiplicador es 7, que multiplicado por todas las denominaciones del multiplicando da $399^{du.}$ $35^{rs.}\ 28^{mrs.}$ Reduciendo las inferiores á las superiores, resulta...

| $57^{du.}$ | $5^{rs.}$ | $4^{mrs.}$ |
|---|---|---|
| 7 | | |
| 399 | 35 | 28 |

$400^{du.}\ 15^{rs.}\ 28^{mrs.}$, valor de 7 lib.

2.º Se pide el valor de $17^{v}$ á razon de.... $45^{du.}\ 12^{rs.}\ 6^{mrs.}$ el pie. El multiplicador es

| 51, número de pies contenido en $17^{v}$. | $45^{du.}$ | $12^{rs.}$ | $6^{mrs.}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | 51 | | | |
| | 2295 | 612 | 306 | |
| | $2326^{du.}$ | $1^{rl.}$ | $0^{mrs.}$ | valor de $17^{v}$. |

Si el multiplicador es número mixto, es mejor dejarlo bajo la forma de complejo para valuar sucesivamente sus partes, que se dividirán de tal modo que cada una sea parte alicuota de la anterior, es decir, que sea divisor exacto de la anterior.

*Ejemplos.* 1.° Se pide el valor de $4^{v}$ $2^{P}$ $8^{p}$ de un género á razon de $5^{du.}$ $8^{rs.}$ $10^{mrs.}$ la vara. El multiplicador es $4+\frac{2}{3}+\frac{8}{36}$; pero acomoda dejarlo bajo su forma compleja.

*Forma del cálculo.*

| Valor de una vara. | $5^{du.}$ | $8^{rs.}$ | $10^{mrs.}$ |
|---|---|---|---|
| | $4^{v}$ | $2^{P}$ | $8^{p}$ |
| Por $4^{v}$...... | 20 | 32 | 40 |
| Por $1^{P}$...... | 1 | 16 | $3\frac{1}{3}$ |
| Por $1^{P}$...... | 1 | 16 | $3\frac{1}{3}$ |
| Por $6^{p}$...... | 0 | 18 | $1\frac{2}{3}$ |
| Por $2^{p}$...... | 0 | 6 | $0\frac{5}{9}$ |
| | $26^{du.}$ | $9^{rs.}$ | $14\frac{8}{9}{}^{mrs.}$ valor de $4^{v}$ $2^{P}$ $8_{p}$. |

*Esplicacion.* Coloco en primer fila el multiplicando, anotando que es valor de una vara, y pongo debajo el multiplicador bajo su forma compleja:

Valúo primero las 4 varas, multiplicando por 4 el valor de una vara.

Tengo que valuar 2 pies: pero como estos no son parte alicuota de la vara valúo un solo pie, que es tercera parte de la vara, sacando el tercio del multiplicando. Pongo debajo el valor del otro pie.

Tengo ahora que valuar 8 pulgadas. Como 6 pulgadas componen medio pie, les corresponde la mitad de lo que vale el pie. Quedan que valuar 2 pulgadas, que son la tercera parte de 6 pulgadas, y les corres-

ponde la tercera parte del producto anterior. Sumo y tengo el producto total.

2.º ¿Cuánto valen 18$^{lib.}$ 0$^{mc.}$ 6$^{on.}$ 4$^{ad.}$ de cualquier género, valiendo el marco 51$^{d.}$ 15$^{rs.}$ 5$^{mrs.}$ El multiplicador es $36 + \frac{6}{8} + \frac{4}{128}$. Dejemoslo bajo la forma compleja 36$^{mc.}$ 6$^{on.}$ 4$^{ad.}$

Valor de 1$^{mc.}$.. 51$^{d.}$ 15$^{rs.}$ 5$^{mrs.}$
36$^{mc.}$ 6$^{on.}$ 4$^{ad.}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| por 36$^{mc.}$ . . | 306<br>153 | 90<br>45 | 180 |
| por 4$^{on.}$ . . . . . . | 25 | 17 | $19\frac{1}{2}$, mitad del valor del m$^{co.}$ |
| por 2$^{on.}$ . . . . . . | 12 | 18 | $26\frac{3}{4}$, mitad del valor de 4$^{on.}$ |
| por 4$^{ad.}$ . . . . . . | 1 | 12 | $11\frac{27}{32}$, octava del valor de 2$^{on.}$ |

1903$^{du.}$ 14$^{rs.}$ $0\frac{3}{32}$$^{mrs.}$, valor de 18$^{lib.}$ 0$^{mc.}$ 6$^{on.}$ 4$^{ad.}$.

3.º Se pide el valor de 36$^{lib.}$ 6$^{on.}$ 9$^{ad.}$ de plata, cuya *ley es de* 11 *dineros y* 12 *granos.*

Para resolver esta cuestion debemos observar, que teniendo la plata liga considerable de otras materias desde que sale del mineral, y no despojándose nunca enteramente de ellas por las operaciones que sufre despues, cuando está labrada, bajo cualquier forma que sea, contiene siempre alguna porcion de aquellas materias no preciosas. Pero como unos pedazos de mineral contienen mas liga que otros; y por otra parte, las operaciones que sufre hasta que está labrada, dejan en unas porciones mas liga que en otras, de aqui es, que la cantidad de plata pura es diferente en las diversas piezas labradas de este metal, y su precio es diverso segun la diferente cantidad de plata pura, que contiene cada pieza, que es lo que se llama la *ley de la plata* en aquella pieza.

Para valuar esta ley, se divide el marco de peso en 12 *dineros* y cada *dinero* en 24 *granos;* de modo que el marco consta de 288 granos.

Un pedazo de plata enteramente pura tendria la ley de 12 dineros: es decir, que todo el marco seria plata sin liga alguna.

La operacion del *contraste*, propia del arte de la platería, consiste en averiguar la ley de una pieza de plata; es decir, de

los 12 dineros que contiene cada marco suyo, averiguar cuantos son de plata pura, y cuantos de liga. Asi, cuando en el contraste se declara que la ley de una pieza de plata es de $10\frac{1}{2}$ dineros ó de $10^{di.}$ $12^{gr.}$, esto quiere decir, que en cada marco de aquella pieza hay $10\frac{1}{2}$ dineros de plata pura, y $1\frac{1}{2}$ de liga sin valor, ó 252 granos de plata pura y 36 de liga.

Conocida la ley de una pieza de plata, es facil de averiguar su valor en reales, porque cada grano de plata pura vale $\frac{20}{33}$ de real por las leyes de España.

En el ejemplo propuesto la ley de la plata es $11^{d.}$ $12^{gr.}$, ó $276^{gr.}$: lo que quiere decir, que teniendo el marco 276 granos de plata pura, vale $276 \times \frac{20}{33}$, ó $\frac{5520}{33} = 167^{rs.} \frac{9}{33} = 167^{rs.} \frac{3}{11}$. La cuestion se reduce, pues, á esta: valiendo el marco $167^{rs.} \frac{13}{11}$, ¿cuánto valdrán $36^{lib.}$ $6^{on.}$ $9^{ad.}$? El multiplicador es $72^{mc.}$ $6^{on.}$ $9^{ad.}$ Como $\frac{3}{11}$ de real valen $9\frac{3}{11}$ maravedí, el multiplicando es

| | | | |
|---|---|---|---|
| Valor de 1 marco. | $167^{rs.}$ | $9^{mrs.} \frac{3}{11}$ | |
| | $72^{mc.}$ | $6^{on.}$ $9^{ad.}$ | |
| Por 72 marcos... | 334 | $667\frac{7}{11}$ | |
| | 1169 | | |
| Por 4 onzas....... | 83 | $21\frac{7}{11}$, | mitad del valor del marco. |
| Por 2 onzas....... | 41 | $27\frac{9}{11}$; | mitad del valor de 4 onzas. |
| Por 8 adarmes... | 10 | $15\frac{5}{11}$, | cuarta parte del valor de 2 onz. |
| Por 1 adarme.... | 1 | $10\frac{19}{44}$, | octava parte del valor de 8 ad.s |
| | $12180^{rs.}$ | $28\frac{43}{44}^{mrs.}$, | valor de la pieza de plata. |

39. Dos casos diferentes pueden ocurrir cuando hay que partir números concretos: el primero cuando hay que averiguar el número de veces que una cantidad se contiene en otra de su misma especie: el segundo, cuando se trata de repartir el dividendo en cierto número de partes iguales. En el primer caso el divisor es concreto: en el segundo es abstracto (36).

*Ejemplo del primer caso.* Habiendo empleado $60^{du.}$ $8^{rs.}$ $14^{mrs.}$ en una pieza de paño á razon de $3^{du.}$ $4^{rs.}$ $20^{mrs.}$ la vara, se pide cuantas varas tenia la pieza. Tendria tantas como veces el precio de una vara se contiene en el valor de toda la pieza: por tanto deberé partir los $60^{du.}$ $8^{rs.}$ $14^{mrs.}$ por $3^{du.}$ $4^{rs.}$ $20^{mrs.}$, particion en la cual el divisor es concreto, y el cociente debe ser abstracto,

aunque la propuesta de la cuestion lo obliga á ser varas.

Esta particion se hace con facilidad, reduciendo dividendo y divisor á una misma denominacion, que ordinariamente es la menor, y partiendo despues. En el ejemplo el dividendo se reduce á 41086 mrs., y el divisor á 2196: el cociente es $18^{v}\,\frac{779}{1098}=18^{v}\ 2^{p}\ 1^{p}\,\frac{33}{61}$.

*Ejemplo del segundo caso.* Habiendo empleado $60^{du.}$ $8^{rs.}$ $14^{mrs.}$ en $3^{v}$ $2^{P}$ $8^{p}$, averiguar el precio de una vara. Esta cuestion se reduce á dividir $60^{du.}$ $8^{rs.}$ $14^{mrs.}$ en el número de partes iguales, que espresa el número $3+\frac{2}{3}+\frac{8}{36}$. Asi el divisor es abstracto, y el cociente será concreto y de la especie del dividendo, pues es una parte suya.

Para hacer la division en este caso, despues de simplificar los quebrados del divisor, se reduce todo él á un solo quebrado; y se partirá el dividendo por él (27), multiplicando el dividendo por el denominador, y partiendo el producto por el numerador. Si el divisor es entero, no hay mas que partir por él sucesivamente las partes del dividendo, reduciendo los restos de denominacion superior á la inferior inmediata. En el ejemplo anterior el divisor es $3+\frac{2}{3}+\frac{8}{36}=3+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=3\frac{8}{9}=\frac{35}{9}$. Multiplico, pues, el dividendo por 9, y pártolo por 35.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $60^{du.}$ | $8^{rs.}$ | $14^{mrs.}\times 9$ | |
| 540 | 72 | 126 | |
| $543^{du.}$ | $15^{rs.}$ | $24^{mrs.}$ | 35 |
| 193 | $37,5^{rs.}$ | | |
| 18 | 25 | $87,4^{mrs.}$ | $15^{du.}\ 10^{rs.}\ 24^{mrs.}\,\frac{34}{35}$ |
| | | 174 | |
| | | 34 | |

La particion de $543^{du.}$ por 35 deja de resto $18^{du.}$ Los reduzco á 360 rs., que con los 15 que tiene el dividendo componen 375 rs. Su resto 25 rs.=850 mrs., que con los 24 del dividendo componen 874 mrs.

Un obrero ha recibido $151^{rs.}$ $20^{mrs.}$ por $42^{ds.}$ de trabajo: ¿á cómo ha salido por dia? El divisor es 42.

| | | |
|---|---|---|
| $151^{rs.}$ | $20^{mrs.}$ | 42 |
| 25 | 870 | $3^{rs.}\ 20^{mrs.}\,\frac{5}{7}$ |
| | 30 | |

### 10.º *Formacion de las potencias.*

40. Para elevar un número á la segunda potencia se le multiplica por sí mismo una vez: para elevarlo á la tercera, dos veces: para elevarlo á la cuarta, tres veces etc.

*Potencias de los números dígitos.*

| 1.ª | 2.ª | 3.ª | 4.ª | 5.ª | 6.ª | 7.ª | 8.ª | 9.ª |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 | 262144 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 | 1953125 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 | 279936 | 1679616 | 10077696 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 | 823543 | 5764801 | 40353607 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 | 2097152 | 16777216 | 134217728 |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 | 4782969 | 43046721 | 387420489 |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 | 10000000 | 100000000 | 1000000000 |

*La potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo índice de sus factores:* porque si $35=5\times 7$, $35^4=35\times 35\times 35\times 35=5\times 7\times 5\times 7\times 5\times 7\times 5\times 7$; y siendo indiferente el orden en que se multipliquen estos factores (6), será $35^4=5^4\times 7^4$: luego etc.



*La raiz de un producto es igual al producto de las raices del mismo índice de sus factores:* porque si $35=5\times 7$, y $35^4=5^4\times 7^4$, para estraer raiz 4.ª de esta segunda ecuacion y reproducir la primera, deberá estraerse la raiz 4.ª de los factores $5^4$ y $7^4$, lo que da 5 y 7, y multiplicarse despues: luego etc.

*Una fraccion se eleva á una potencia elevando sus dos términos:* porque $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3^3}{5^3}=\frac{27}{125}$: luego etc.

La raiz de una fraccion se estrae estrayéndola de sus dos términos: porque si $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3^3}{5^3}$, $\sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}}=\frac{3}{5}$;

y para volver de $\frac{3^3}{5^3}$ á $\frac{3}{5}$, debe estraerse raiz cúbica de los dos términos del quebrado: luegó etc.

41. *Una fraccion irreductible, elevada á cualquier potencia, produce una fraccion irreductible.*

*Dem.* Sea la fraccion irreductible $\frac{4}{15}$, y por consiguiente 4 y 15 son primos entre sí. Elevada al cubo produce $\frac{4\times4\times4}{15\times15\times15}$: es decir, quedan en numerador y en denominador los mismos factores primos que en $\frac{4}{15}$: pero en 4 y 15 no hay ningun factor comun: luego tampoco lo hay en $\frac{4\times4\times4}{15\times15\times15}$: luego etc.

## 11.º *Estraccion de las raices cuadradas.*

42. *El cuadrado de un número, dividido en dos partes consta del cuadrado de la 1.ª, dos veces el producto de la 1.ª por la 2.ª y el cuadrado de la 2.ª*

Porque para multiplicar $7+5$ por $7+5$ deberé multiplicar $7+5$, primero por 7, y luego por 5: la primer multiplicacion da $7^2+7.5$; y la segunda $7.5+5^2$; y reuniendo se tiene $(7+5)^2=7^2+2.7.5+5^2$. No se crea, pues, que para cuadrar la cantidad $7+5$ basta cuadrar el 7 y el 5: es menester añadir á sus cuadrados el doble de $7\times5$. *De aqui se infiere que el cuadrado de un número de dos cifras se compone del cuadrado de las decenas, dos veces el producto de decenas por unidades y cuadrado de unidades.*

1. *El cuadrado de un número tiene doble número de cifras que la raiz, ó doble número de cifras menos una.* Porque siendo 100 el cuadrado de 10, y 10000 el de 100, todo número de dos cifras (por consiguiente comprendido entre 10 y 100) tendrá su cuadrado entre 100 y 10000, es decir, tendrá ó 4 cifras ó 3: del mismo modo probaré que siendo el cuadrado de 100, 10000, y el de 1000, 1000000, todo número de 3 cifras ha de tener en su cuadrado ó 6 cifras ó 5 etc.

43. Los numeros de una cifra ó de dos tienen un número dígito por raiz cuadrada. Veamos cómo se halla esta, cuando el número tiene 3 ó 4 cifras.

Sea, por ejemplo, el número propuesto 784, que deberá estar compuesto del cuadrado de las decenas, del duplo de decenas por unidades y del cuadrado de unidades. El cuadrado de las decenas se forma cuadrando la cifra de las decenas, y añadiéndole dos ceros: luego este cuadrado no entra en la suma hasta la clase de las centenas. Luego deberé separar las dos primeras cifras de la derecha, y lo que quede á la izquierda (el 7) contendrá el cuadrado de la cifra de las decenas, y ademas las centenas que produzcan las otras dos partes del cuadrado.

Tómese, pues, la raiz del mayor cuadrado contenido en la primer division de la izquierda (esta raiz es 2), y se tendrá la cifra de las decenas. Restando su cuadrado de la primer division, el resto (que es 3) será la reserva del doble de decenas por unidades y del cuadrado de unidades. Esta reserva, reunida con las dos notas separadas á la derecha, formará un todo (que es 384); que contendrá las dos segundas partes del cuadrado.

El duplo de decenas por unidades se forma multiplicando el doble de la cifra de las decenas por las unidades, y agregando un cero á la derecha: luego en la suma este producto estaba contenido en las decenas: separando, pues, la nota de las unidades, lo que quede á la izquierda (que es 38) será el duplo de la nota de las decenas por las unidades. Pártase, pues, por el duplo de la nota de las decenas, y se tendrá la de las unidades. Multiplicando el cociente por el divisor, y restando del dividendo, el resíduo será la reserva del cuadrado de las unidades. Si este resíduo, uniéndole la última nota (que es 4) iguala al cuadrado de las unidades, la raiz es exacta, y la operacion está concluida. Si es menor que el cuadrado de las unidades, quiere decir que es necesario disminuir la nota

de las unidades. Hé aqui el cálculo.

```
√7,84 = 28        √27,35 = 52        √1,21 = 11
 38,4 | 48          23,5  | 102        . 2,1 | 21
 000     8          . 31    2          . .     1
```

Cuando el número pasa de 4 cifras, la raiz tendrá mas de dos: eso quiere decir, que las decenas de la raiz constan de mas de una cifra, y el procedimiento del cálculo será el mismo.

```
√27,35,29 = 523
  23.5     | 102
   312.9  2| 1043
   ....       3
```

En este número el cuadrado de las decenas está contenido en 2735; la raiz del mayor cuadrado contenido en este número se halla por el método anterior; y es 52, el resto es 31: luego 3129 contiene el duplo de decenas por unidades y el cuadrado de unidades: separando, pues, la cifra 9, y dividiendo 312 por el duplo de las decenas, que es 104, se tendrán las unidades 3.

Como este razonamiento puede aplicarse á cualquier número, se ve que se deberá dividir el número de dos en dos cifras desde la derecha á la izquierda. Cuando el número de cifras es impar, la última division de la izquierda tendrá solo una cifra. Cada division debe producir una cifra en la raiz.

44. Si el número entero propuesto no es cuadrado perfecto, no podrá espresarse su raiz ni en números enteros, ni en números fraccionarios. Asi $\sqrt{5}$ no puede ser un número entero, pues está entre 2 y 3, ni puede ser un número fraccionario; pues este, elevado al cuadrado, produciria una fraccion irreductible (41), que no podria ser igual á 5. Por esta razon se llaman *inconmensurables* las raices de números que no son potencias perfectas.

Es posible acercarse cuanto se quiera á una raiz inconmensurable: para esto fijo la aproximacion que quiero tener, es decir, determino si quiero aproximarme al valor de la raiz con diferencia de menos de $\frac{1}{5}$, de $\frac{1}{7}$, de $\frac{1}{10}$ etc. Multiplico la cantidad propuesta

por el cuádrado del denominador de la aproximacion: estraygo raiz cuadrada del cuadrado mayor contenido en el producto, y á esta raiz doy por denominador el de la aproximacion. Por ejemplo: quiero la raiz cuadrada de 5 con diferencia de menos de $\frac{1}{6}$. Multiplico $5 \times 6^2 = 180$: su raiz próxima menor es 13: y digo que $\frac{13}{6}$ se diferencia de $\sqrt{5}$ menos de $\frac{1}{6}$.

*Dem.* Es evidente que $\sqrt{5} = \frac{6\sqrt{5}}{6}$. Tambien lo es que $6\sqrt{5} = \sqrt{5.\ 6^2} = \sqrt{5.\ 36} = \sqrt{180}$: luego $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{180}}{6}$. Pero $\sqrt{180}$ está entre 13 y 14: luego $\frac{\sqrt{180}}{6}$, ó $\sqrt{5}$ está entre $\frac{13}{6}$ y $\frac{14}{6}$; pero de $\frac{13}{6}$ á $\frac{14}{6}$ hay de diferencia $\frac{1}{6}$: luego de $\frac{13}{6}$ á $\sqrt{5}$ hay menos de $\frac{1}{6}$ de diferencia.

Si la aproximacion debe ser por decimales se multiplicará la cantidad por el cuadrado del denominador de la aproximacion, lo que equivale á añadirle tantas veces dos ceros como notas decimales se quieren. En la práctica se añaden dos ceros á cada resíduo, y cada dos ceros han de dar una nota decimal en la raiz.

*Ejemplo.*

$\sqrt{3,21} = 17,916$
2 2,1 | 27
320,0 7 | 349
5 90,0 9 | 3581
231 90,0 1 | 35825
6

Al resíduo 32 uno dos ceros, y continúo la misma operacion de la raiz cuadrada, teniendo cuidado de poner la coma decimal antes de las notas que ván á resultar.

45. Para estraer raiz cuadrada de un quebrado, cuyos dos términos la tienen exacta, se estrae de ambos. Asi $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Si el denominador es el único que tiene raiz exacta, se estrae del numerador aproximada y del denominador exacta, y se parten despues: asi $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1,414}{3} = 0,471$.

Si el denominador no tiene raiz exacta, se multipli-

can los dos términos del quebrado por el denominador: el quebrado que resulte será igual al propuesto, y su denominador tendrá raiz exacta.

*Ejemplo.* $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{21}{7^2}} = \frac{4,582}{7} = 0,654.$

Para estraer la raiz cuadrada de un número mixto, se le reduce á quebrado, y se le estrae despues la raiz.

$\sqrt{3\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{26}{7}} = \sqrt{\frac{182}{7^2}} = \frac{13,4907}{7} = 1,9272.$

Para estraer raiz cuadrada de una cantidad decimal, se hará la misma operacion que en los enteros; pero antes debe hacerse el denominador cuadrado perfecto. Para esto es menester que el número de notas decimales de la cantidad sea par.

*Ejemplo.* $\sqrt{0,3} = \sqrt{0,30} = 0,54$, aproximando la raiz hasta las centésimas.

Cuando una raiz inconmensurable está multiplicada ó partida por otra, deberá estraerse la raiz del producto ó cociente de las dos cantidades. Asi $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$ (40).

### 12.º *Raices cúbicas.*

46. El cubo de una cantidad $(7+5)$, compuesta de dos partes, consta de cuatro productos: á saber, cubo de la primera, triplo del cuadrado de la primera por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, y cubo de la segunda $(7^3+3.\ 7.^2\ 5+3.\ 7.5^2 +5^3)$.

*Dem.* El cuadrado de una cantidad $7+5$, compuesta de dos partes, es igual al cuadrado de la primera, duplo de la primera por la segunda y cuadrado de la segunda: esto es, $7^2+2.\ 7.\ 5.+5^2$. Multiplicando este cuadrado por $7+5$, resultará el cubo de $7+5$. Multiplicó, pues, $7^2+2.\ 7.\ 5+5^2$, primero por 7, y despues por 5, y tendré

$$\left.\begin{matrix} 7^3+2.\ 7^2.\ 5+\ 7.\ 5^2 \\ +\ 7^2.\ 5+2.\ 7.\ 5^2+5^3 \end{matrix}\right\} = 7^3+3.\ 7^2.\ 5+3.\ 7.\ 5^2+5^3$$ : luego etc.

De aqui se infiere que toda cantidad compuesta de decenas y unidades, tendrá su cubo compuesto de estas cuatro partes: cubo de decenas (esto es, la nota de las decenas elevada al cubo, uniéndole tres ceros): tres veces el cuadrado de las decenas por las unidades (producto que tendrá dos ceros á la derecha; esto es, pertenece á una clase inferior un lugar á la anterior): triplo de decenas por cuadrado de unidades (que será de una clase inferior en un lugar á la anterior), y cubo de unidades, que tambien bajará un lugar con respecto á la clase anterior.

*Ejemplo.*

| | | |
|---|---|---|
| $45^3 =$ | 64 | cubo de decenas. |
| | 240 | triplo del cuadrado de dec.s por unidades. |
| | 300 | triplo de dec.s por cuadrado de unidades. |
| | 125 | cubo de unidades. |
| | 91125. | |

Los números de una nota (que estan entre 1 y 10) tienen sus cubos entre 1 y 1000, esto es, no pasan sus cubos de tres notas. Los números de dos notas (que estan entre 10 y 100) tienen sus cubos entre 1000 y 1000000, esto es, no tienen sus cubos menos de cuatro notas, ni mas de 6; y en general el número de notas que tiene el cubo, ó es triplo del que tiene la cantidad, ó es dicho triplo menos 1, ó dicho triplo menos 2.

47. Si se quiere estraer raiz cúbica de un número que no pasa de tres notas, dicha raiz cúbica no tendrá mas que una, y se hallará en la tabla de los cubos de los números dígitos: así $\sqrt[3]{216} = 6$.

Si el número tiene mas de tres notas, y no pasa de seis notas, su raiz cúbica tendrá dos, una de decenas y otra de unidades: luego el número propuesto contendrá el cubo de las decenas, el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las

decenas por el cuadrado de las unidades, y el cubo de las unidades. Como el cubo de las decenas está en los millares, separo las tres primeras notas de la derecha, busco la raiz cúbica próxima menor contenida en los millares, que quedarán á la izquierda, y esta raiz cúbica será la nota de las decenas. Tomo su cubo, y réstolo de los millares; y uniendo al resíduo las notas que se separaron primero, su conjunto compondrá el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, y el cubo de las unidades.

El primero de estos tres productos debe estar en las centenas: separo, pues, las dos primeras notas de la derecha, y parto las centenas por el triplo del cuadrado de las decenas, y tendré en el cociente la nota de las unidades. Multiplico el cociente por el divisor, y añadiéndole á este producto las dos partidas que faltan para completar el cubo, que son: triplo de decenas por cuadrado de unidades y cubo de unidades, restaré la suma de la cantidad, y debe quedar cero si la raiz es exacta. Si esta suma es mayor que la cantidad, debe disminuirse la nota de las unidades.

*Ejemplo.*

$\sqrt[3]{91{,}125} = 45$
64
271,25 | 48
240    5
300
125
. . .

Separo las tres primeras notas. $\sqrt[3]{91}$ es próximamente 4, nota de las decenas. Resto su cubo 64 de los millares. El resto es 27: únole la 1.ª division 125. Las centenas son 271: pártolas por 48, triplo del cuadrado de 4. El cociente 5 son las unidades. Multiplico cociente por divisor, completo el cubo, añadiendo 300, que es $3 . 4 . 5^2$ y 125, que es $5^3$. No queda nada.

Es, pues, $45 = \sqrt[3]{91125}$.

Si el número tiene mas de 6 notas, las decenas de la raiz tienen mas de una nota. Se hallan empleando

para la estraccion de la raiz cúbica de los millares la regla anterior.

*Ejemplo.* $\sqrt[3]{12,305,472} = 230$

```
23² = 4        4 3,05        |12    36
                              3     54
   129         4 167                27
   529         1 384.72|1587       ____
                        0          4167
```

Para estraer la raiz cúbica de los millares 12305, separo las tres notas 305, y hago la operacion anterior. Las decenas son 23. Para hallar las unidades repito la misma operacion. La raiz 230 es inexacta.

48. Para aproximar una raiz cúbica inexacta se multiplica la cantidad por el cubo del denominador de la aproximacion, y se estrae la raiz cúbica en enteros, poniéndole despues el denominador de la aproximacion. Asi $\sqrt[3]{2}$ en menos de $\frac{1}{4}$, es $\frac{\sqrt{64.2}}{4} = \frac{5}{4}$.

Si la aproximacion es por decimales, se agregan tantas veces tres ceros como notas decimales se pidan en la aproximacion: esto equivale á multiplicar cada vez por 1000, que es el cubo de 10.

*Ejemplo.*

```
∛477 = 7,813
 343
1340.00      |147
..24 480.00   98
 6 204 590,00
             |18252     1176
               1        1344      18252
|1829883                 512       2341
   3
```

El 9 no es buena nota como se vé en el cálculo siguiente: 1323 la suma de 1701: solo estas dos partidas es mayor que el dividendo.

Si el número es fraccionario, se hará su denomi-

nador cubo exacto, si no lo es, multiplicando los dos términos del quebrado por el cuadrado del denominador. Se estrae despues la raiz del numerador, exacta ó aproximada, segun sea, y se parte por la del denominador.

*Ejemplos.* $\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5.7^2}{7^3}} = \frac{6,2573}{7} = 0,8939.$

*Otro.* $\sqrt[3]{17\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{53}{3}} = \sqrt[3]{\frac{53.3^2}{3^3}} = \frac{7,813}{3} = 2,604.$

Si la cantidad de que se quiere estraer raiz cúbica es decimal, deberá tener un número de decimales triplo del que ha de tener la raiz; para esto se le unen á la derecha los ceros necesarios. Despues se estrae la raiz cúbica, como en los enteros. La coma decimal se pondrá en la raiz, cuando se empiecen á bajar las divisiones decimales. Asi $\sqrt[3]{5,7}$ aproximada hasta las décimas, es $\sqrt[3]{5,700} = 1,7$; $\sqrt[3]{3,2178}$, aproximada hasta las décimas, es $\sqrt[3]{3,218} = 1,4$; $\sqrt[3]{0,3}$ aproximada hasta las centésimas es $\sqrt[3]{0,300000} = 0,66$.

### 13.° *Equidiferencias y proporciones.*

49. Cuando se comparan dos cantidades, ó es con el objeto de averiguar el esceso de la una sobre la otra, ó con el de averiguar cuántas veces cabe la una en la otra. El resultado de esta segunda comparacion, que es el cociente de las dos cantidades, se llama *razon.* La razon de 12 á 4 es $\frac{12}{4}$, ó 3. El primer término de la razon se llama *antecedente*, y el segundo *consecuente.*

La diferencia entre dos números no se altera añadiendo ó restando á ambos una misma cantidad (5). Asi $12 - 5 = 13 - 6 = 11 - 4$.

La razon de dos números no se altera, multiplicándolos ó partiéndolos por un mismo número (13, 9.°). Asi $\frac{42}{12} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

La razon de las cantidades irracionales es la de sus valores aproximados. Tal vez esta relacion puede ser racional. Asi $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$.

Hay equidiferencia entre cuatro cantidades, cuando la diferencia de las primeras es igual á la de las segundas. $10 - 8 = 7 - 5$.

*En toda equidiferencia la suma de los términos estremos es igual á la de los medios:* porque si $10 - 8 = 7 - 5$, añadiendo á ambas partes $5 + 8$, resulta $10 + 5 = 7 + 8$: luego etc.

Reciprocamente de la igualdad de dos sumas se puede deducir una equidiferencia: porque si $10 + 5 = 7 + 8$, restando de ambos miembros 5 y 8, resulta $10 - 8 = 7 - 5$.

Conociendo tres términos de una equidiferencia se puede averiguar el que falta: porque si es estremo se suman los medios, y de la suma se resta el estremo conocido: y si es medio, se suman los estremos, y de la suma se resta el medio conocido.

*Ejemplos.* Si $9 - 7 = 10 - x$, ($x$ representa el término desconocido), será $x = 10 + 7 - 9 = 8$, y la equidiferencia será $9 - 7 = 10 - 8$.

$9 - 7 = x - 14$, da $x = 16$, y $9 - 7 = 16 - 14$.

La equidiferencia es *continua* si los términos medios son iguales, como $9 - 7 = 7 - 5$. En ella *la suma de los estremos es igual al doble del término medio, y este = á la semisuma de los estremos.* Asi el término medio entre 15 y 29 es 22, de modo que $29 - 22 = 22 - 15$.

50. *Proporcion* es la igualdad de dos razones; y como razon no es mas que el cociente de dos cantidades ó el quebrado que forman (49), se infiere, que la proporcion no es mas que la igualdad de dos quebrados. Tal es $\frac{20}{10} = \frac{30}{15}$, que se pinta asi $20 : 10 :: 30 : 15$. La proporcion es contínua cuando sus medios son iguales, como esta $20 : 10 :: 10 : 5$.

En toda proporcion *el producto de los estremos es igual al de los medios*, porque si $\frac{20}{10} = \frac{30}{15}$, será $20 \times 15$

$=30 \times 10$, (23): luego etc. Si la proporcion es contínua, el producto de los estremos será igual al cuadrado del término medio, y este igual á la raiz cuadrada del producto de los estremos. Asi el término medio, entre 3 y 12 es $\sqrt{3 \times 12} = 6$, y la proporcion contínua es $3 : 6 :: 6 : 12$.

De dos productos iguales se puede formar una proporcion, pues se pueden formar de ellos dos quebrados iguales. Asi si $8 \times 5 = 4 \times 10$, será $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, ó $8 : 10 :: 4 : 5$.

Por la misma razon, si el cuadrado de un número es igual al producto de otros dos, aquel número será *medio proporcional* entre los otros dos: asi si $6^2 = 3 \times 12$, será $3 : 6 :: 6 : 12$.

Dados tres términos de una proporcion, se podrá averiguar el que falta, si es estremo, multiplicando los medios, y partiendo el producto por el estremo conocido; si es medio, multiplicando los estremos y partiendo el producto por el medio conocido.

*Ejemplo.* $7 : 9 :: 21 : x = \frac{21 \times 9}{7} = 27$.

51. Dada una proporcion se podrán disponer sus términos de otras siete maneras, conservando siempre el producto de estremos igual al de medios; empezando por un mismo término en cada dos disposiciones.

*Ejemplo.*

7:21 :: 9:27<br>
7:9 :: 21:27. Esta se llama *la alternada* de la primera.<br>
21:7 :: 27:9. Esta se llama *la invertida* de la primera.<br>
21:27 :: 7:9<br>
9:27 :: 7:21<br>
9:7 :: 27:21<br>
27:9 :: 21:7<br>
27:21 :: 9:7

Tambien se pueden multiplicar y partir los dos antecedentes ó los dos consecuentes por un mismo nú-

mero; pues esto equivale á multiplicar ó partir los productos de estremos y medios por un mismo número.

*Suma ó diferencia de antecedentes es á suma ó diferencia de consecuentes, como un antecedente á su consecuente: y suma ó diferencia de los términos de una razon es á suma ó diferencia de los términos de la otra, como antecedente á antecedente, ó consecuente á consecuente:* pues se ha demostrado (24), que si $\frac{8}{24} = \frac{7}{21}$, será $\frac{8+7}{24+21} = \frac{8-7}{24-21} = \frac{8}{24} = \frac{7}{21}$, y $\frac{24+8}{21+7} = \frac{24-8}{21-7} = \frac{8}{7} = \frac{24}{21}$: luego etc.

En una serie de razones iguales la suma de antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente á su consecuente: porque si $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{10}{5}$ .... será $\frac{6+4+10}{3+2+5} = \frac{6}{3}$.

Multiplicando dos proporciones término á término, habrá proporcion. Porque si $\frac{6}{3} = \frac{14}{7}$, y $\frac{9}{2} = \frac{18}{4}$, multiplicando estas dos ecuaciones será $\frac{6 \times 9}{3 \times 2} = \frac{14 \times 18}{7 \times 4}$. Luego elevando los términos de una proporcion á una misma potencia, ó estrayéndoles una misma raiz, resultará proporcion.

### 14. *Regla de tres.*

51. Regla de tres-simple es la que se aplica á todas las cuestiones, en que dos cantidades estan en proporcion con otras dos, siendo la 4.ª la incógnita. *Ejemplo.* Si 30 obreros hacen 20 varas de obra, 21 ¿cuántas harán? Se conoce que el número de obreros debe ser proporcional á las varas que harán, observando que á doble número de trabajadores debe corresponder doble número de varas, etc.

Se llaman *datos* las dos cantidades conocidas de una misma especie, y resultados las otras dos.

La regla es directa, cuando aumentando ó disminuyendo los datos, aumentan ó disminuyen los re-

sultados; inversa; cuando aumentando los datos disminuyen los resultados, ó disminuyendo los datos, aumentan los resultados. Por ejemplo: 57 obreros hacen una obra en 5 dias: 19 obreros ¿en cuánto tiempo la harán? A proporcion que disminuya el número de obreros, aumentará el tiempo que necesitan para hacer la misma obra, y por tanto esta regla es inversa.

La directa se resuelve diciendo: dato del resultado conocido es al dato del resultado incógnito, como el resultado conocido es al incógnito; y se busca el cuarto término de esta proporcion. En la inversa se dice: dato del resultado incógnito es al dato del resultado conocido, como el resultado conocido es al incógnito: pues este debe ser tantas veces mayor que el resultado conocido, cuantas su dato es menor que el del resultado conocido.

*Ejemplos.*

1.º 30 obreros hacen 20 varas de pared: 21 ¿cuántas harán? A menos obreros menos varas. Regla directa: $30:21$, ó $10:7::20:x=14$ varas.

2.º Cincuenta y siete obreros hacen una obra en 5 dias: 19 ¿en cuánto tiempo la harán? A menos obreros mas dias: regla inversa: $19:57$, ó $1:3::5:x=15$ dias.

3.º Para forrar un mueble se han gastado de una tela de $\frac{3}{4}$ de ancho 6 varas: ¿cuántas serian necesarias para forrarlo de una tela de $\frac{2}{3}$ de ancho? A menos ancho mas largo: inversa: $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}::6:x=6\frac{3}{4}$ varas.

4.º Un viagero para caminar 50 leguas ha empleado 8 dias: para caminar 80 ¿cuántos empleará? A mas leguas mas dias: directa: $50:80$, ó $5:8::8:x=12\frac{4}{5}$ dias.

5.º Un hombre caminando 7 horas al dia emplea 8 dias en acabar su viage: si hubiese caminado 10 horas al dia ¿cuántos dias hubiera empleado? Mientras mas horas ande al dia menos tiempo necesita para el viage: inversa: $10:7::8:x=5,6$ dias.

6.º $17^{lib.}5^{on.}4^{ad.}$ de plata valen 869 pesetas $3^{rs.\ vn.}$

$6^{mrs.}$; $15^{lib.}$ $3^{on.}$ $2^{ad.}$ $\frac{1}{2}$ ¿cuánto valdrán? A menos libras de plata menos valor: directa.

$17^{lib.}$ $5^{on.}$ $4^{ad.}$ : $14^{lib.}$ $3^{on.}$ $2^{ad.}$ $\frac{1}{2}$ : : $869^{pes.}$ $3^{rs.\ vn.}$ $6^{mrs.}$ : $x$. Reduzco los dos primeros términos á su menor especie, y simplificando es 8872 : 7269 : : 869 pes. $3^{rs.}$ $6^{mrs.}$ : $x = 712^{pes.}$ $2^{rs.}$ $18^{mrs.}\frac{2013}{2218}$.

7.º Seis escuadrones han consumido un almacen de víveres en 54 dias: ¿9 escuadrones en cuánto tiempo lo hubieran consumido? A mas escuadrones menos tiempo: inversa: 9 : 6, ó 3 : 2 : : 54 : $x = 36$ dias.

8.º Un navío tiene víveres para 10 dias, pero aun tiene que estar 15 en la mar. ¿A cuánto debe reducirse la racion de cada navegante?

Llamando 1 á la racion que tienen, observo que mientras mas tiempo esten en la mar menos racion debe darse á cada uno, si se quiere que alcancen los víveres hasta 15 dias: luego la regla es inversa: 15 : 10, ó 3 : 2 : : 1 : $x = \frac{2}{3}$. Luego la racion debe reducirse á los $\frac{2}{3}$ de lo que era.

52. Regla de tres compuesta es aquella en que cada resultado pende de mas de un dato, como esta: si 20 hombres para hacer 160 varas de obra han gastado 15 dias, 30 hombres para hacer 192 varas ¿cuántos dias necesitarán? Los resultados son los dias, y su número depende del número de hombres y del de varas.

Para resolver la regla de tres compuesta se forma de cada dos datos de igual especie una razon (que deberá invertirse si aquellos datos son inversos con los resultados): se multiplicarán dichas razones, y su producto se comparará con los resultados. De este modo la regla de tres compuesta queda reducida á una proporcion simple.

*Dem.* Sea la regla propuesta: Si 20 hombres hacen 160 varas en 15 dias, 30 hombres para hacer 192 varas ¿cuántos dias necesitan?

Digo primeramente: si 20 hombres para hacer 160 varas necesitan 15 dias, 30 hombres para hacer la misma obra ¿cuántos necesitarán? Como las varas son las

mismas, deberemos comparar los hombres con los dias: esta regla de tres es simple é inversa: diremos, pues, $30 : 20 :: 15 : \frac{20 \times 15}{30}$, dias que necesitan 30 hombres para hacer 160 varas.

Mas no son 160 varas las que deben hacer los 30 hombres, sino 192. Digo, pues: si 30 hombres para hacer 160 varas necesitan $\frac{20 \times 15}{30}$, número de dias, los mismos hombres para hacer 192 varas ¿cuántos dias necesitan? Esta es otra regla de 3 simple, porque siendo los hombres los mismos, solo habrá que comparar las varas con los dias, y es directa: luego será $160 : 192 :: \frac{20 \times 15}{30} : \frac{192 \times 20 \times 15}{160 \times 30}$, número de dias en que 30 hombres harán 192 varas. Pero este resultado es visiblemente el cuarto término de esta proporcion $30 \times 160 : 2 \times 192 :: 15 : x$; cuya primer razon viene de multiplicar entre sí las razones de los datos, la de los hombres inversa, y la de las varas directa: luego deberemos multiplicar las razones de los datos, y comparar con el producto la de los resultados.

Este método tiene la ventaja de poderse simplificar separadamente las razones de los datos. Por ejemplo, la de los hombres se reduce á $3 : 2$
la de las varas á $20 : 24$ ó á $5 : 6$. . $5 : 6$
antes de multiplicar suprimo el 3, factor comun en un antecedente y un consecuente, y la razon compuesta será $5 : 4$. Digo pues $5 : 4 :: 15 : x = 12$, dias que tardarán 30 hombres en hacer 192 varas de obra.

*Otro ejemplo.* Si 40 hombres trabajando 7 horas al dia para hacer 300 varas necesitan 8 dias, 51 hombres trabajando 6 horas al dia, para hacer 459 varas ¿cuántos dias necesitarán?

Dispongo asi los términos: $40^{\text{hóm.}}$ $7^{\text{hor.}}$ $300^{\text{v.}}$ $8^{\text{d.}}$
$51$ $6$ $459$ $x$

Comparo los hombres con los dias, y estan en razon inversa. . . . . . . . . . . . . . . . $51 : 40$

Las horas tambien estan en razon inversa con los dias . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 : 7

Las varas estan en razon directa con los dias . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 300 : 459

La última razon partida por 3 da 100 : 153. Este consecuente y el primer antecedente 51 se pueden partir por 51: las razones se reducen pues á . . . . . . . . . . . . . . 1 : 40 / 6 : 7 / 100 : 3

El antecedente 6 y el consecuente 3 pueden partirse por 3; el antecedente 100 y el consecuente 40 pueden dividirse por 20, y queda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 : 2 / 2 : 7 / 5 : 1

El antecedente 2 y el consecuente 2 se desvanecen; y la razon compuesta queda reducida á 5 : 7: será, pues, $5 : 7 :: 8 : x = 11\frac{1}{5}$ dias.

53. La regla de compañías enseña á dividir la ganancia ó pérdida de un fondo en proporcion con los capitales de los asociados. Para esto se hace esta proporcion: el fondo es á su ganancia ó pérdida, como el capital de cada asociado á su ganancia ó pérdida correspondiente.

Si los capitales han estado diferentes tiempos en el fondo, deberán reducirse á un mismo tiempo, multiplicando cada uno por el número de meses que ha estado en el fondo; pues un capital que ha estado 4 meses se reputa igual á un cuadruplo capital que hubiera estado un mes.

*Ejemplo.* Tres asociados han puesto en fondos, el primero 12000 duros, el segundo 8000, el tercero 4000: han ganado 5430 duros. De estos tocarán al primero 2715, al segundo 1810, al tercero 905.

*Otro.* Tres asociados han puesto en fondos, el primero 1000 reales por 7 meses: el segundo 8000 por 5 meses: el tercero 4000 por 20 meses: han ganado 1500 reales: ¿cuánto toca á cada uno? El capital del primero se reputa de 7000 reales, el del segundo de 40000, y el del tercero de 80000. Ya este caso está reducido al anterior.

54. Regla de *interes* es la que enseña á hallar la ganancia de una suma prestada bajo la condicion de que 100 unidades de aquella suma produzcan al prestador un cierto tanto. La regla de tres será: si 100 produce un cierto tanto, la suma prestada ¿cuánto

producirá? Asi 2500 duros á $6\frac{1}{2}$ por 100 al año dan $162\frac{1}{2}$ duros.

55. Regla de *descuento* es la que enseña á hallar la diminucion que debe hacerse á una letra cuando se paga antes del término en que cumple. Esta diminucion debe ser el interes que se supone estar acumulado en la letra, y se hallará diciendo: si 100 mas el tanto del descuento se han de quedar en 100, ¿la letra en cuánto quedará?

Pero el modo mas usual de hacer el descuento es deducir de la letra su tanto por 100. Asi 6000 reales descontados al 5 por 100 quedan en 5700, quitandole á la letra 300 rs., que es su 5 por 100. Esta manera, aunque es la mas usada, no es justa; porque descontando de cada 100, 5 del tanto, supone que en la letra se acumularon 5 de interes á cada 95, lo que no es asi: que solo se han acumulado 5 á cada 100. En efecto 5700 al 5 por 100 se convierten en 5985, añadiéndole 285, que es el 5 por 100 de 5700; de modo que el tenedor de la letra pierde 15 reales, ademas del interes que estaba acumulado en la letra. Este interes pasa justamente á poder del banquero; pero para calcularlo no se deben quitar 5 de 100, sino 5 de 105, que es como estan acumulados en la letra.

El tanto del descuento se enuncia ordinariamente por un año; y si la anticipacion es solo de algunos meses se calcula el tanto que corresponde á esta anticipacion por una sencilla regla de tres. *Ejemplo.* Se pide descontar una letra, que se paga con $4\frac{1}{2}$ meses de anticipacion, siendo el tanto del descuento anual $5\frac{1}{2}$ por 100. Formo esta proporcion: 12 meses : $4\frac{1}{2}$ meses : : $5\frac{1}{2}$ : $x = \frac{99}{4} : 12 = \frac{33}{16} = 2\frac{1}{16}$. A este tanto deberé descontar la letra.

56. Regla de conjunta es la que enseña à reducir cantidades de una especie á otra con el auxilio de varias especies intermedias. Para esto no es necesario valuar la cantidad en especies intermedias, sino multiplicar entre sí las razones que indican la relacion de unas especies con otras, teniendo cuidado de observar las siguientes reglas:

1.ª Que el antecedente de la primer razon sea de la especie dada: 2.ª que el consecuente de la última razon sea de la especie á que se va á reducir la cantidad: 3.ª que el consecuente de cada razon sea de la especie del antecedente de la que sigue.

La razon compuesta que resulta se compara con la cantidad propuesta y con la cantidad reducida: el 4.º término de esta proporcion será la cantidad reducida.

*Ejemplo.* 50 libras de Paris valen 51 libras de Hamburgo: 25 libras de Hamburgo valen 24 de Francfort: 6000 libras de Paris ¿cuántas libras de Francfort valdrán?

Las razones componentes son................ 50 : 51
25 : 24

La compuesta es.............................. 1250 : 1224 : : 6000 :

$x = \frac{24 \times 1224}{5} = \frac{29376}{5} = 5875\frac{1}{5}$ libras de Francfort, que valdrán las 6000 de Paris.

*Otro.* Se quieren reducir 100 doblones de cambio de España á francos, moneda francesa; sabiendo que el doblon de cambio de España vale 1088 mrs., 375 mrs. componen un ducado español de cambio, este ducado 95 gros de Amsterdan, 12 gros componen un sueldo de Amsterdan, 34 de estos sueldos 240 dineros esterlines ingleses, y 32 dineros esterlines 3 francos.

$$\left.\begin{array}{r} 1 : 1088 \\ 375 : 1 \\ 1 : 95 \\ 12 : 1 \\ 17 : 120 \\ 32 : 3 \end{array}\right\}$$

Estas razones se simplifican, partiendo.......
1088 y 32 por 32:
12 y 120 por 12:
375 y 95 por 5; y se reducen

$$\text{á}\quad\left.\begin{array}{r} 1 : 34 \\ 75 : 1 \\ 1 : 19 \\ 17 : 10 \\ 1 : 3 \end{array}\right\}$$

Se vuelve á simplificar partiendo 75 y 3 por 3, y $\frac{75}{3}$ y 10 por 5, y 34 y 17 por 17, y es

$$\begin{array}{r} 1 : 2 \\ 5 : 1 \\ 1 : 19 \\ 1 : 2 \\ \hline 5 : 76 : : 100 : x = \end{array}$$

$\frac{7600}{5} = 1520$ francos, valor de los 100 doblones de cambio.

57. El *cambio*, que se reduce á una regla de conjunta, es la reduccion de una suma espresada en moneda de un pais á moneda de otro pais. Las relaciones entre ambas monedas se espresan por medio de monedas imaginarias. Estas relaciones varian; y para espresar sus variaciones se usa en el comercio de la siguiente nomenclatura. En uno de los dos paises que cambian se supone constante la unidad de su moneda imaginaria, y se dice que *da lo cierto.* A esta moneda corresponden en el otro pais diferentes cantidades de su moneda imaginaria en diferentes épocas; y de este pais se dice que *da lo incierto.* Este número variable de unidades es lo que se llama *cambio*, y sirve para convertir las monedas imagina-

rias de un pais en las del otro. Por ejemplo, España cambia con Inglaterra con *pesos* de 512 mrs.; y si en una época determinada dan en Lóndres por 512 mrs. 36 dineros esterlines, se dice que el *cambio* está entonces á 36. España da lo cierto, porque siempre da un peso de 512 mrs., y Lóndres da lo incierto, porque unas veces da en cambio de este peso 36 esterlines, otras veces $35\frac{1}{2}$, otras 34 etc.

*Ejemplo* 1.° Un comerciante de Madrid toma sobre Lóndres letra de 1505 rs. 30 mrs., ¿cuánto se debe pagar por ella en Lóndres estando el cambio á $35\frac{1}{2}$? Sabiendo que la libra esterlina vale 240 dineros esterlines, la conjunta se hará asi, reduciendo la letra á maravedis, y será 51200.

$512 : 35\frac{1}{2}$
$240 : 1$

$$512 \times 240 : 35\frac{1}{2} : : 51200 : x = \frac{100 \times 35\frac{1}{2}}{240} = 14 \text{ libras, } 15 \text{ esquelines, } 10 \text{ dineros esterlines.}$$

2.° Un comerciante de Lóndres toma sobre Madrid letra de 97 libras esterlinas, estando el cambio á 35. ¿Cuánto se debe pagar en Madrid por dicha letra? 10015 rs. $28\frac{6}{7}$ mrs.

58. Regla de *aligacion* es la que enseña á buscar el precio á que se debe vender la mezcla de varias especies, de las cuales cada una tiene precio distinto, pará no perder ni ganar. Se supone que en la mezcla no se disminuye ni el peso ni el volumen de las especies mezcladas. Tambien se emplea esta regla cuando se conoce el precio de la mezcla, que se llama *precio medio*, y se buscan las cantidades que se han de tomar de las especies mezcladas.

Para conocer el precio medio se buscan los valores de las especies, multiplicando el precio de cada una por el número de unidades que hay en ella: sumando estos valores resultará el valor de la mezcla: partiéndolo por el número de sus unidades, que ha de ser igual á la suma de unidades de todas las especies, se tendrá el precio á que se ha de vender la mezcla.

*Ejemplo* 1.° Se han mezclado 15 cántaros de vino de á 5 rs. el cántaro con 9 de á 7: ¿á cuánto se han de vender los 24 cántaros de la mezcla?

Los 15 cántaros valen 75 rs., los 9, 63 rs.: luego toda la mezcla vale 75 + 63, ó 138 rs.: partiéndolos por los 24 cántaros de la mezcla será el precio medio $x = \frac{138}{24} = 5$ rs. $25\frac{1}{2}$ mrs.

2.° Se han mezclado 14 fanegas de trigo de á 25 rs. con 50

de á 30, y con 22 de á 28: ¿á cuánto se deberán vender las 86 fanegas de la mezcla? $x=\frac{350+1500+616}{86}=28$ rs. $22\frac{40}{43}$ mrs.

*Si se mezclan dos especies, las cantidades que se han de tomar de ellas estan en razon inversa de las diferencias de sus precios al precio medio.*

*Dem.* Supongamos que se hayan mezclado 15 cántaros de vino de á 5 rs. con 9 de á 7; y llamo $x$ al precio medio. Será $x(15+9)=15\times5+9\times7$, ó $x\times15+x\times9=15\times5+9\times7$.

$7 \ldots\ldots x-5$<br>
$x$<br>
$5 \ldots\ldots 7-x$

Resto de ambos miembros los productos $x\times9$ y $15\times5$, y tendré $x\times15-15\times5=9\times7-x\times9$, ó separando en cada miembro el factor comun es $15(x-5)=9(7-x)$, y como de dos productos iguales se puede formar una proporcion, será $\frac{9}{15}=\frac{x-5}{7-x}$, es decir, que las cantidades 9 y 15 que se toman de las dos especies son proporcionales á las diferencias trocadas entre el precio medio $x$ y los precios mayor y menor.

Por consiguiente cuando se da el precio medio, y se busca la proporcion en que se han de mezclar las especies, se resta el precio de cada especie del precio medio, y se ponen encontradas estas diferencias.

*Ejemplo.* Un cosechero tiene vino de á 9 rs. el cántaro, y vino de á 5 rs. el cántaro: ¿en qué proporcion los deberá mezclar para vender el cántaro de la mezcla á 6 rs.?

9...... 1<br>
6<br>
5...... 3

Hemos puesto las diferencias encontradas; y quieren decir, que á cada cántaro de á 9 rs. debe mezclar 3 de á 5.

Cuando se da la cantidad de una especie, conocida la proporcion que deben guardar, es facil de hallar la cantidad de las demas especies.

*Ejemplo.* Tengo 40 fanegas de trigo de á 30 rs.: ¿cuántas le deberé mezclar de á 24 para que resulte trigo de á 28? Deberé

40   30...... 4<br>
28<br>
20   24...... 2

mezclar 4 de á 30 con 2 de á 24. Ahora formo esta proporcion $4:2::40:x=20$, número de fanegas de á 24, que deberé mezclar con las 40 de á 30.

Cuando es conocido el número de unidades de la mezcla se reparte entre *las diferencias proporcionales*, como en la regla de compañías.

*Ejemplo.* ¿Qué cantidades debo tomar de trigo de á 24 rs. y de trigo de á 30 rs. para que resulten 600 fanegas de trigo de á 26? A cada 2 de á 30 debo mezclar 4 de á 24 para que resulten 6 de á 26. Ahora digo: si para 6 de la mezcla tomo 2 de la primer especie, para 600 ¿cuánto deberé tomar? 6 : 2 : : 600 : 200.

| | | |
|---|---|---|
| 200 | 30...... | 2 |
| 600 | 26 | |
| 400 | 24...... | 4 |

Del mismo modo hallaré que debo tomar 400 fanegas de la segunda especie.

Si las especies superiores é inferiores á la media son mas de dos, la cuestion se podrá resolver de muchas maneras. Compárense de cada vez dos especies, una superior y otra inferior á la media, y hállense sus diferencias proporcionales. Súmense despues las diferencias que se hayan aglomerado en una especie, y se tendrá la proporcion de la mezcla. Como se pueden combinar de muchos modos las especies que se han de comparar de cada vez, podrá resolverse de muchas maneras la cuestion.

*Ejemplo.* Se quiere mezclar plata de 10 dineros de ley con plata de 11 dineros y 3 granos, de 11 y de 10 dineros y 7 granos para que resulte plata de 11 dineros y 2 granos.

$$11\tfrac{3}{24}\ldots\ldots \tfrac{2}{24}+\tfrac{19}{24}+1\tfrac{2}{24}=\tfrac{47}{24}\ldots\; 47$$

$11\tfrac{2}{24}$

$$11\ldots\ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{24}\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$10\tfrac{7}{24}\ldots\ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{24}\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$10\ldots\ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{24}\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

No hay mas que una especie superior. Tengo que compararla sucesivamente con todas las inferiores; y resultan los números proporcionales $\frac{47}{24}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$, ó multiplicándolos todos por 24, 47, 1, 1, 1.

59. Regla de *falsa posicion* es la que enseña á hallar el valor de un número incógnito por medio de otro supuesto.

Si las operaciones que hay que hacer con el número supuesto para llegar al resultado de la cuestion, son todas multiplicaciones ó particiones por números conocidos, el resultado que producirán con el número supuesto será al resultado que producirán con el número verdadero en la razon de estos dos números; pues esta razon no deberá alterarse, aunque ambos se multipliquen por una misma cantidad. Diré, pues: resultado que ha producido el número supuesto es al re-

sultado verdadero como el número supuesto al verdadero. Esta regla se llama de falsa posicion *simple*.

*Ejemplos.* 1.º Se pide un número, cuya mitad, cuarto y quinto sumen 456. Como $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$, lo que se pide es un número, cuyos $\frac{19}{20}$ compongan 456.

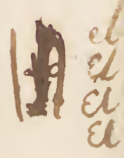
Sea dicho número 40 (número supuesto): sus $\frac{19}{20}$ componen 38 (resultado falso). Formo la proporcion $38 : 456 :: 40 : x=480$, número pedido. En efecto $\frac{1}{2}.\ 480+\frac{1}{4}.\ 480+\frac{1}{5}.\ 480=456$.

2.º Un estanque tiene cuatro caños que lo llenan, el 1.º en 2 horas, el 2.º en 3, el 3.º en 5, el 4.º en 6: ¿en cuánto tiempo lo llenarán todos juntos?

El tiempo que se pide, partido sucesivamente por los números 2, 3, 5, 6, hará conocer las partes del estanque, que llenarán respectivamente las fuentes en el tiempo que corran juntas, y estas partes deben sumar el estanque. Luego lo que se pide es un número, cuya mitad, tercio, quinto y sexto sumen 1, que representa el estanque. Y como $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6}{5}$, lo que se pide es un número, cuyos $\frac{6}{5}$ produzcan 1.

Sea dicho número 5 (número falso): sus $\frac{6}{5}$ producen 6 (resultado falso). Digo $6 : 1 :: 5 : x=\frac{5}{6}$ de hora, tiempo en que los cuatro caños llenarán el estanque.

En efecto en este tiempo el 1.º llenará $\frac{5}{12}$ del estanque.
El 2.º . . . . $\frac{5}{18}$
El 3.º . . . . $\frac{1}{6}$
El 4.º . . . . $\frac{5}{36}$



y $\frac{5}{12}+\frac{5}{18}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}=\frac{36}{36}=$ 1 estanque.

Pero si ademas de multiplicaciones y particiones hay que hacer con el número incógnito sumas ó restas de números conocidos, ya no existirá la proporcion anterior, pues añadiendo ó restando á los múltiplos ó cocientes de los números verdadero y supuesto unas mismas cantidades, se altera la razon que antes tenian. Entonces la regla de falsa posicion se llama *doble*, porque es preciso hacer dos supuestos. Propongámonos un ejemplo para comprenderla bien.

De dos jugadores el mas hábil pone 12 reales contra 8 en cada juego: al cabo de 10 juegos ha ganado 20 rs.: ¿cuántos ganó y cuantos perdió de estos diez juegos?

Supongamos que ganó 4: y tendremos $4 \times 8 - 12\ (10-4)=$ no á 20 reales, sino á $20-60$: (este $-60$ es el error que

se comete adoptando el número supuesto 4). Será pues $4 \times 8 - 12 \times 10 + 12 \times 4 = 20 - 60$, $4 \ (8 + 12) - 12 \times 10 = 20 - 60$.

Supongamos que ganó 6: y tendremos $6 \times 8 - 12 \ (10 - 6) = 20 - 20$ (este $-20$ es el segundo error). Esta ecuacion se reduce á $6 \ (8 + 12) - 12 \times 10 = 20 - 20$.

En fin, sea $x$ el número verdadero. Será $x \ (8 + 12) - 12 \times 10 = 20$.

Restando de esta ecuacion las otras dos, tendremos
$(x - 6)(8 + 12) = 20$
$(x - 4)(8 + 12) = 60$,

y partiendo será $\frac{x-6}{x-4} = \frac{20}{60}$. Multiplicando estremos y medios será $60 \times x - 60 \times 6 = 20 \times x - 20 \times 4$. Añadiendo á ambos miembros $60 \times 6$, y restando $20 \times x$, será $60 \times x - 20 \times x = 60 \times 6 - 20 \times 4$, ó $x \ (60 - 20) = 60 \times 6 - 20 \times 4$, de donde $x = \frac{60 \times 6 - 20 \times 4}{60 - 20}$.

Luego el número verdadero es igual *á la diferencia de los productos de cada supuesto por el error del otro, partida por la diferencia de los errores.* Estas sumas se convierten en diferencias, si los errores tienen contrarios signos.

En el caso propuesto el número verdadero es 7. Ganó 7 juegos, y en ellos 56 rs.: perdió 3 juegos y en ellos 36 rs: quedó ganando 20 rs.

## 15.º *Progresiones.*

60. Llámase *progresion aritmética ó por diferencia* una serie de términos, tales, que entre cada dos consecutivos hay siempre una misma diferencia, como esta: 1.3.5.7.9.11...

*Cualquier término de una progresion aritmética es igual al primero mas la diferencia, multiplicada por el número de términos menos uno*: porque el 2.º término consta del 1.º + 1 diferencia: el 3.º, del 1.º + 2 diferencias: el 4.º del 1.º + 3 diferencias... Asi el término vigésimo de la progresion anterior será $= 1 + 19 \cdot 2 = 39$. Se puede, pues, calcular cualquier término de una progresion, sin calcular los anteriores.

*Interpolar entre dos números dados cualquier número de medios aritméticos.* Por ejemplo, se pide interpolar entre 4 y 39 seis medios aritméticos. Si conociesemos la diferencia de la progresion añadida al primer término 4, daria el segundo, añadida al segundo, daria el 3.º etc. Luego lo que hay que buscar es la diferencia de la progresion; llámola $x$.

Si se han de interpolar seis términos entre 4 y 39, 39 es el 8.º término, y será = al 1.º + 7 diferencias; luego $39 = 4 + 7 \times x$. Resto de ambos miembros 4, y es $7 \times x = 39 - 4$; luego $x = \frac{39-4}{7}$. Luego *restaré del último termino el primero: partiré la diferencia por el número de medios que se han de interpolar, mas uno,* y tendré la diferencia de la progresion. En el caso propuesto la diferencia es 5, y la progresion 4 . 9 . 14 . 19 . 24 . 29 . 34 . 39.

Para interpolar entre 4 y 11 ocho medios, la razon es $\frac{11-4}{9} = \frac{7}{9}$, y la progresion es $4 . 4\frac{7}{9} . 5\frac{5}{9} . 6\frac{3}{9} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{6}{9} . 9\frac{4}{9} . 10\frac{2}{9} . 11$.

61. *Si entre cada dos términos de una progresion aritmética se interpola igual número de medios aritméticos, resultará progresion aritmética:* porque la diferencia será la misma en cada interpolacion, siendo la misma la diferencia de los estremos y el número de términos interpolados. *Ejemplo.* Si en la progresion 4 . 9 . 14 . 19 . 24 interpolamos 2 medios entre cada dos términos, resultará otra progresion, cuya diferencia es $1\frac{2}{3}$: $4 . 5\frac{2}{3} . 7\frac{1}{3} . 9 . 10\frac{2}{3} . 12\frac{1}{3} . 14 . 15\frac{2}{3} . 17\frac{1}{3} . 19 . 20\frac{2}{3} . 22\frac{1}{3} . 24$.

62. Llámase progresion *geométrica ó por cociente* una serie de términos, de los cuales cada dos consecutivos tienen una misma razon; como esta 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486, cuya razon es 3.

*Cualquier término de una progresion aritmética es igual al primero, multiplicado por la razon elevada á la potencia, que indica el número de términos menos*

*uno*: porque el segundo término es igual al primero multiplicado por la razon: el 3.º es igual al primero multiplicado por el cuadrado de la razon: el 4.º es igual al primero multiplicado por el cubo de la razon, etc. Asi el término décimo de la progresion anterior será $2 \times 3^9 = 39366$.

*Interpolar entre dos números dados cualquier número de medios geométricos.* Por ejemplo, se pide interpolar entre 2 y 162 tres medios geométricos. Si conociesemos la razon de la progresion, multiplicada por el primer término 2, daria el 2.º: multiplicada por el 2.º daria el 3.º etc. Luego lo que hay que buscar es la razon de la progresion: llámola $x$.

Si se han de interpolar tres términos entre 2 y 162, 162 es el quinto término de la progresion, y por tanto $162 = 2 \times x^4$: partiendo ambos miembros por 2, es $x^4 = \frac{162}{2}$, y estrayendo de ambos miembros la raiz cuarta, será $x = \sqrt[4]{\frac{162}{2}}$. Luego *estraeré del cociente de los estremos la raiz que indica el número de medios que se han de interpolar, mas uno*, y tendré la razon de la progresion. En el ejemplo propuesto es $\sqrt[4]{81} = 3$, y la progresion es 2 : 6 : 18 : 54 : 162.

*Otro ejemplo.* Interpolar entre 3 y 1536 ocho medios proporcionales. La razon es $\sqrt[9]{\frac{1536}{3}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[3]{8} = 2$: y la progresion 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 : 768 : 1536.

Puede ocurrir que la raiz sea inconmensurable, en cuyo caso no se puede hacer la interpolacion sino aproximadamente.

Esta operacion es muy dificil, cuando hay que estraer raices superiores á la cúbica de cantidades grandes ó inconmensurables.

63. *Si entre cada dos términos de una progresion geométrica, se interpola igual número de medios geométricos, resultará progresion geométrica*: porque en

cada interpolacion resultará una misma razon, siendo uno mismo el cociente de los estremos, y el número de medios que se han de interpolar. *Ejemplo.* Sea la progresion geométrica 1 : 4 : 16 : 64 : 256. Si entre cada dos términos interpolamos un medio geométrico resulta la serie 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, que tambien es progresion geométrica, y su razon es 2, raiz cuadrada de la razon de la progresion anterior.

### 16.º *Logaritmos.*

64. Sea la progresion aritmética 0.1.2.3.4.5.6.

Si elegimos un número cualquiera, por ejemplo 3, y formamos una progresion geométrica, cuyo primer término sea 1, y la razon el número elegido, colocando esta progresion debajo de la aritmética, los términos de la geométrica se llaman *números*, y los correspondientes de la aritmética se llaman *logaritmos* de aquellos números.

Asi la progresion geométrica. . . . 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 es la de los *números*; y la aritmética. . . . . . . . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 es la de los *logaritmos.* Por tanto 1 es logaritmo de 3, 4 de 81 etc. lo que se indica así: L.3 = 1, L. 81 = 4.

El número 3, que sirvió de razon para formar la progresion geométrica se llama *base logarítmica*; y como es arbitrario, se infiere que puede haber muchos sistemas de logaritmos: pues la progresion geométrica variará, variando la base; de modo que un mismo logaritmo corresponderá á diferentes números en diferentes sistemas, y al contrario, á un mismo número corresponderán diferentes logaritmos.

*Ejemplo.* Si se toma por base el 9, las progresiones serán 1 : 9 : 81 : 729
0 . 1 . 2 . 3
donde se ve que en este sistema 2 es logaritmo de 81,

y en el sistema anterior 2 es logaritmo de 9. Tambien en el sistema cuya base es 3, L.729=6, y en el sistema cuya base es 9, L . 729=3.

La base puede ser entera, fraccionaria, inconmensurable: en una palabra, puede ser la cantidad que queramos. Pero en todo sistema *el logaritmo de la unidad es cero y el de la base es* 1, como se conoce por la simple inspeccion de las progresiones.

Se ve ademas que los logaritmos son *los esponentes de las potencias á que se eleva la base para producir el correspondiente número*: es decir, L. 243=5, porque $3^5=243$.

65. *Cada logaritmo contiene como parte á la diferencia de la progresion aritmética tantas veces, como su número contiene como factor á la razon de la progresion geométrica:* esto es, si L. 243=5, el logaritmo 5 contiene como parte á la diferencia 1, como 243 contiene como factor á la razon 3; ó lo que es lo mismo, si $5=1\times 5$, $243=3^5$.

*Demostracion.* Cualquier término de una progresion aritmética es igual al 1.º mas la diferencia multiplicada por el número de términos menos uno: pero como en la progresion propuesta el primer término es cero, cada término será igual á la diferencia multiplicada por el número de términos menos uno.

Tambien cualquier término de una progresion geométrica es igual al 1.º multiplicado por la razon elevada á la potencia, que indica el número de términos menos uno: pero como en la progresion geométrica el primer término es 1, cualquier otro término será igual á la razon elevada á la potencia que indica el número de términos menos uno.

Tomando, pues, dos términos correspondientes de ambas progresiones, es decir, que sean logaritmo y número, será uno mismo el número de términos contados desde el primero hasta cada uno de ellos: y por tanto en el logaritmo se hallará la diferencia multiplicada por un número igual al índice de la potencia

que tendrá la razon en el número: luego etc.

*La suma de los logaritmos de dos números es igual al logaritmo del producto de dichos números.*

*Demostracion.* Sean los dos números 27 y 243, cuyos logaritmos son 3 y 5. El logaritmo 3 contiene como parte á la diferencia, las mismas veces (en el caso presente son 3) que su número 27 contiene como factor á la razon.

El logaritmo 5 contiene como parte á la diferencia, las mismas veces (en el caso presente son 5) que su número 243 contiene como factor á la razon.

Luego la suma 8 contendrá como parte á la diferencia las mismas veces (en el caso presente son 8), que el producto 6561 contiene como factor á la razon: luego 8 y 6561 son términos correspondientes de ambas progresiones, es decir, que 8 es logaritmo de 6561: luego etc.

Luego *para multiplicar dos números, deben sumarse sus logaritmos, y la suma será el logaritmo del producto; búsquese el número que le corresponde, y ese será el producto:* asi para multiplicar 27 por 81, sumo sus logaritmos 3 y 4; y la suma 7 es el logaritmo del producto que se busca, que será 2187.

Al contrario, *para partir dos números restaré del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, y tendré el logaritmo del cociente: busco el número que le corresponde, y este será el cociente;* porque siendo el dividendo producto del divisor por el cociente, el logaritmo del dividendo será igual al logaritmo del divisor, mas el logaritmo del cociente: luego restando del logarítmo del dividendo el logaritmo del divisor, se tendrá el del cociente. Asi para partir 6561 por 27, resto sus logaritmos 8 y 3, y el resíduo 5 es el logaritmo del cociente, que será 243.

*Para elevar un número á una potencia se multiplicará el logaritmo del número por el índice de la potencia, y se tendrá el logaritmo de la potencia: búsquese su número, y ese será la potencia.* Porque si se ha de

elevar 9 al cubo, como $9^3 = 9 \times 9 \times 9$, será $L.\ 9^3 = L.\ 9 + L.\ 9\ L. + 9 = 3\ L.\ 9$. Siendo 2 el logaritmo de 9, multiplícolo por 3, índice de la potencia, y será 6 el logaritmo de $9^3$: el número que corresponde al logaritmo 6, es 729, y este será el cubo de 9.

*Para estraer una raiz cualquiera de un número se partirá el logaritmo del número por el índice de la raiz, y se tendrá el logaritmo de la raiz: búsquese su número, y ese será la raiz;* porque la estraccion de raiz es operacion inversa de elevar á la potencia. Asi para estraer $\sqrt[4]{6561}$, parto el logaritmo de 6561, que es 8, por 4, índice de la raiz. Será 2 el logaritmo de la raiz pedida, que es 9.

Se ve, pues, que los logaritmos simplifican estraordinariamente los cálculos, pues reducen la multiplicacion á suma, la particion á resta, la elevacion á potencia á una sencilla multiplicacion, y la estraccion de raiz á una sencilla particion. Neper, gran geómetra escoces, fue el inventor de los logaritmos.

66. Para sacar de esta invencion toda la utilidad posible se eligió una base logarítmica conveniente. El matemático Briggs propuso el 10, base del sistema de la numeracion vulgar; y esta base se ha adoptado para los logaritmos *tabulares*, llamados asi, porque son los que comprende la tabla mas usual de logaritmos.

Siendo la base logarítmica 10, serán las progresiones de los números y de los logaritmos las siguientes:

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 *números.*
.0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 *logaritmos.*

Pero en estas progresiones solo se encuentran los logaritmos de los números, que son potencias del 10, y no tenemos los logaritmos de los números intermedios 2, 3, 4 etc., 11, 12, 13 etc., 101, 102, 103 etc.

Para hallar los logaritmos de estos números intermedios se interpolaron entre cada dos términos de cada progresion un término medio, y no por eso dejó de haber progresion (61 y 63). Esta operacion se repitió

muchas veces, de modo que siendo muy pequeña la razon de la progresion geométrica, se encontraron en ella todos los números intermedios entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000 etc.; y si no se encontró exactamente el 2, por ejemplo, se encontró otro que se le acercaba con la aproximacion deseada: por ejemplo, si la aproximacion fue de seis notas decimales, y entre los medios geométricos se encontró 2,0000024, ó 1,9999996, cualquiera de estos se pudo tomar como =2, y asi de los demas números intermedios: los correspondientes medios aritméticos fueron sus logaritmos, que en las tablas de Callet tienen 7 notas de aproximacion.

Cada logaritmo consta de una nota entera, que se llama *característica*, y de una fraccion decimal, que se llama *mantisa*.

*La característica de un logaritmo en el sistema tabular es igual al número de notas que tiene su número, menos una.*

*Dem.* Los números de una nota estan comprendidos entre 1 y 10, y sus logaritmos entre 0 y 1: luego la característica debe ser cero.

Los números de dos notas estan entre 10 y 100, y sus logaritmos entre 1 y 2: luego la característica debe ser 1. Del mismo modo se prueba que los logaritmos de los números de 3 notas deben tener 2 de característica, los de 4 notas 3...... luego etc.

Por consiguiente dado el número es facil determinar la característica de su logaritmo, que será igual al número de notas enteras que tenga el número, menos una. Asi el logaritmo de 57292 tendrá 4 de característica: el de 57,924 tendrá 1 de característica. Por esa razon las tablas de logaritmos de Callet no tienen características.

Al contrario, dado el logaritmo se podrá conocer el número de notas que ha de tener el número, que serán tantas como unidades tiene la característica del logaritmo, mas una. Asi el logaritmo 2,5734991 ha de

corresponder á un número que tenga tres notas enteras: el logaritmo 0,8215792 es de un número que solo tiene una nota entera.

*Si un número se multiplica ó parte por* 10, 100 *etc., la mantisa de su logaritmo no varía.*

*Dem.* Para multiplicar ó partir un número por 10, 100 etc., se añadirá ó quitará á su logaritmo el logaritmo de 10, que es 1, ó el de 100, que es 2, etc. Pero como estas adiciones ó sustracciones se han de efectuar sobre la nota entera, que es la característica, y no sobre la parte decimal, se infiere que la mantisa no varía: luego etc.

De aqui se infiere que la mantisa del logaritmo de un número se queda la misma, aunque al número se le añadan ó quiten ceros á su derecha; y si es decimal, aunque la vírgula se mueva de derecha á izquierda, ó de izquierda á derecha.

Asi el logaritmo de 2 tiene la misma mantisa que los de 20, 200, 2000 etc.

El logaritmo de 5246 tiene la misma mantisa que los de 524,6 : 52,46 : 5,246.

*Luego* 1.º *la mantisa nos da á conocer la magnitud y orden de las notas de un número y la característica, cuáles de estas notas son enteras, y cuáles decimales.*

2.º Podremos hallar el logaritmo de cualquier decimal impropia, por ejemplo, de 527,42. Porque la característica debe ser 2, pues hay tres notas enteras en el número; y la mantisa debe ser la misma que la de 52742, número entero.

Tambien se podrá hallar el logaritmo de cualquier fraccion impropia, restando del logaritmo del numerador el del denominador, pues dicha fraccion no es mas que el cociente de sus términos.

Podemos, pues, por medio de las tablas aplicar el cálculo logarítmico á los enteros y fracciones impropias, ya comunes, ya decimales.

67. Las tablas de Callet contienen los logaritmos de los números *naturales* desde 1 hasta 108000.

En las primeras hojas se hallan los logaritmos desde 1 á 1200 con ocho notas decimales, es decir, una nota mas de las que se necesitan en los cálculos ordinarios. Esta nota última se desprecia comunmente.

Siguen despues los logaritmos de los números comprendidos desde 1020 hasta 100000, es decir, de los números que tienen 4 y 5 notas dispuestos con este artificio.

Las cuatro primeras notas del número se buscan en la columna vertical, encabezada N, la quinta nota en la columna horizontal. En la enfilacion de ambas estan las cuatro últimas notas del logaritmo. Las tres primeras son las que estan á la izquierda, y son comunes á todos los sistemas de 4 notas que hay entre cada dos sistemas de tres notas.

Si el número no tiene mas que cuatro notas, se toma cero por quinta nota.

Ultimamente dichas tablas acaban con los logaritmos de los números comprendidos entre 100000 y 108000: estos logaritmos tienen ocho notas decimales. Las cinco primeras notas del número se buscan en la columna vertical, y la sesta en la columna horizontal.

*Buscar el logaritmo de un número mayor que el último de las tablas.* Se pide, por ejemplo, el logaritmo de 57682496. En las tablas de Callet solo se encuentran las cinco primeras notas, y se tiene L.57682, cuya mantisa es 0,7610403.

El logaritmo del número propuesto tiene la misma mantisa que si considerásemos como decimales sus tres últimas notas, que no se encuentran en las tablas. Busquemos, pues, la mantisa de L. 57682,496; es decir, busquemos lo que se debe añadir á la mantisa de 57682 por 0, 496, fraccion que falta á su número.

Examinando las tablas con atencion se ve que los logaritmos próximos tienen una misma diferencia, y este fenómeno se verifica en mayor número de logaritmos, á proporcion que los números son mas grandes. Esto nace de que en los números de 1 nota la unidad

en que escede el logaritmo de 10 al de 1, se reparte no mas que entre 10 logaritmos, siendo asi que en los números de 5 notas la unidad en que escede L. 100000 á L. 10000 se reparte entre 90000 logaritmos: asi debe ser mas lenta la variacion de las diferencias entre los logaritmos próximos.

Es, pues, verdadera aproximadamente esta proporcion: *las diferencias de los logaritmos son proporcionales á las de los números, cuando unos y otros son próximos.*

Volviendo á nuestro ejemplo, como de 57682 al número inmediato hay 1 de diferencia, busco la de sus logaritmos, que es 0,0000076, y formo esta proporcion: 1, diferencia entre los números próximos de las tablas, es á 0,0000076, diferencia entre sus logaritmos, como 0,496, diferencia del número menor al propuesto, es al 4.º término, que será la diferencia de sus logaritmos. Este 4.º término es 0,0000037696, que añadido á la mantisa 7610403, dará la que se pide. Pero como las mantisas no pasan de siete notas, se desprecian en el 4.º término las tres últimas, es decir, tantas como notas se han separado en el número para decimales: asi lo que hay que añadir es 38 á las clases inferiores de la mantisa, que será 0,7610441. Como el número tiene 8 notas enteras, la característica es 7 y L. 57682496=7,7610441.

En las tablas de Callet estan calculadas las diferencias entre los logaritmos próximos, que se encontrarán en la columna vertical encabezada *dif.* Ademas estan calculadas las partes que deben añadirse á la mantisa por cada nota de mas que tenga el número en unas tablitas, que se llaman de *partes proporcionales.* Lo que corresponde á la primer nota de las que no se encuentran en las tablas se escribe debajo de las clases inferiores de la mantisa; y las partes proporcionales, correspondientes á las notas que sigan, se escriben sucesivamente unas debajo de otras, adelantando cada una un lugar hácia la derecha, porque pertenecen á una clase inferior decimal. Despues se suma, despreciando las notas inferiores á la séptima decimal.

*Ejemplo.* L. 57682496 = 7,7610403 mantisa de 57682.
La diferencia es 76: pongo.................. 30 por el 4.
68 por el 9.
46 por el 6.

7,7610440, logaritmo pedido.

Obsérvese que la parte proporcional de la última nota 6 no influye ya en el logaritmo, que sería el mismo, aunque no existiese dicha nota. Esto quiere decir, que reduciendo las mantisas á 7 notas decimales, las tablas no pueden dar con seguridad sino 7 notas en el número, y que la 8.ª no puede ser segura, como no compongan las cinco primeras una cantidad menor que 10800, en cuyo caso nos podrán dar con seguridad hasta ocho notas en el número.

68. *Buscar el numero de un logaritmo, cuya mantisa no se halla en las tablas.*

Resto la próxima menor que se encuentre de la dada, y digo: diferencia que hay entre la mantisa tomada en las tablas y su próxima mayor en las mismas tablas es á 1, diferencia entre sus números, como la diferencia de la mantisa menor á la dada, es á la diferencia del número menor al pedido. Este 4.º término se reduce á decimales, y las notas que dé, se unen á la derecha del número de la mantisa próxima menor. La reduccion á decimales solo deberá llegar hasta dos notas, porque ya no hay seguridad en la tercera.

*Ejemplo.* Se pide el número correspondiente al logaritmo.............................. 7,7610440
La mantisa próxima menor que dan las tablas es..:.............................. 0403

37

La fraccion que se debe añadir al número es $\frac{37}{76}$ que da las notas 49. La mantisa tomada corresponde á las notas 57682: luego las notas del número son 5768249; y como la característica es 7, el número será 57682490.

Con las tablas de Callet no es necesario hacer la reduccion á decimales: porque la diferencia 37 se busca en la tabla de partes proporcionales; y no encontrándose, se ve cual es la próxima menor, que es 30, correspondiente á la nota 4.

Resto 30 de 37, y quedan 7: uniéndole un cero para reducirlo á la especie decimal inferior, es 70, cuya parte proporcional próxima menor es 68, á la que corresponde la nota 9.

Este ejemplo confirma lo que ya hemos dicho, que con 7 decimales en la mantisa solo se puede contar con 7 notas en el número. Por tanto no se puede aplicar el cálculo logarítmico á operaciones en que intervienen números muy grandes. Por ejemplo, si se quiere elevar 14 á la potencia 40, no servirá el cálculo logarítmico sino para hacernos ver en la característica cuántas notas deberá tener la potencia cuadragésima de 14, y las siete primeras notas de esta potencia. Hé aqui el cálculo.

L. 14=1,14612804, tomando todas las 8 notas de las tablas.

Multiplicado por 40.................. 40

45,84512160=L. $14^{40}$, que deberá tener 46 notas.

Mantisa próxima menor. 1167.... sus notas 7000375.

49

Parte proporcional próxima menor....................... 43 su nota 7.

60

Parte proporcional proxima menor........................ 56, su nota 9.

Las 7 primeras notas del número forman la cantidad de 7000379.

En general la aplicacion mas útil del cálculo logarítmico no es en las operaciones de un resultado exacto, sino en las de aproximacion.

Propongamos ya algunos ejemplos.

1.° Se pide el producto de 47×863...... L. 47=1,6720979

L. 863=2,9360108

Sumando....................... 4,6081087: su número 40561 es el producto que se pide.

2.° Se pide la raiz 5 de 1419857:

su logaritmo es............................ 6,1522272

Parte proporcional por 5............ 153

por 7............ 214

6,1522446

Su quinta parte es.... 1.2304489, cuyo número 17 es la raiz quinta del número propuesto.

3.° Se pide el valor de $x=4000\ (1,05)^{12}$.

La elevacion á la 10.ª potencia es multiplicar por 10 el logaritmo del número. La multiplicacion por 4000 es añadir el logaritmo de 4000 al de $(105)^{10}$: de modo que L. $x$=L. 4000 + 10 L. 1,05.

L. 105=0,0211893o
multiplicado por..................... 10
0,2118930
L. 4000= 3,6020600

3,8139530 : su número 6515,58=$x$.
Mantisa próxima menor... 9477..... 651558.
53 en la tabla de partes proporcionales su nota es 8.

2.º Se pide el cociente de $\frac{5314}{2914}$.

L. 5314=3,7254216.
C. L. 2914=6,5355105

10,2609321 : su número es 9296 el cociente 182361.
25... 1
pedido: y es 1,82361.

5.º Se pide el producto $3\frac{5}{7}\times 2\frac{2}{13}=\frac{26}{7}\times\frac{28}{13}$.

L. 26= 1,4149734
L. 28= 1,4471580
C. L. 7=9,1549020
C. L. 13=8,8860566

20,9030900 : su número es 8, producto pedido.

6.º Se pide el cuarto término de la proporcion 153 : 459 :: 17 : $x$. Súmense los logaritmos de los medios, y réstese el logaritmo del primer término, y se tendrá el del cuarto.

L. 17=1,2304489
L. 459=2,6618127
C. L. 153=7,8153086

11,7075702 : su número es 51, 4.º término pedido.

69. La interpolacion de medios geométricos (62) se hace muy fácilmente, construyendo la progresion aritmética de sus logaritmos, y buscando despues los números que les corresponden.

*Ejemplo.* Queremos interpolar entre 8 y 64 cuatro medios geométricos.

El logaritmo de 8 es 0,9030900: el de 64 es 1,8061800. Interpolemos entre estos dos logaritmos cuatro medios aritméticos, y la progresion será

| | | |
|---|---|---|
| 0,9030900 | Sus números formarán la geo- | 8 |
| 1,0837080 | métrica, cuya razon es $\sqrt[5]{8}=$ | 12,1257 |
| 1,2643260 | 1,5157. | 18,3792 |
| 1,4449440 | | 27,8576 |
| 1,6255620 | | 42,2243 |
| 1,8061800 | | 64 |

70. El logaritmo de un quebrado propio deberia hallarse restando del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador; pero esta sustraccion es imposible. Haciéndola por complementos no se pueden quitar las 10 que resultan de mas, y queda el logaritmo gravado con aquellas 10. A estos llamarémos *logaritmos complementarios*. Asi el logaritmo complementario de $\frac{5}{7}$ es 9,8538720.

El logaritmo complementario de 0,024 es 8, 3802112 añadiendo al logaritmo de su numerador el complemento 7 del logaritmo de su denominador 100.

En general el logaritmo complementario de una fraccion decimal impropia tiene la misma mantisa que indican las notas decimales, y su característica es 9, si la cantidad empieza por décimas, 8 si empieza por centésimas, 7 si empieza por milésimas etc. Porque el logaritmo de una fraccion decimal que no tenga mas que una nota en las décimas, como 0, 4, siendo cero la característica del logaritmo de 4, debe tener por característica 9, complemento del logaritmo de 10. Si solo tiene una nota en las centésimas, como 0, 04, será 8 complemento del logaritmo de 100. Si solo tiene una nota en las milésimas, será 7, complemento del logaritmo de 1000, etc.

Pero si tiene muchas notas, las características quedan las mismas: porque cuantas unidades se aumenten á la característica del numerador, por el aumento de notas, otras tantas se aumentan al logaritmo del denominador, y por tanto siempre queda la característica, como si solo hubiera una nota: luego etc.

De aqui se infiere, que para hallar el número correspondiente á un logaritmo complementario, se deben buscar las notas correspondientes á la mantisa, y estas serán las notas decimales: si la característica es 9, la primera de la izquierda representará décimas; si 8, centésimas: si 7, milésimas etc.

*Ejemplo.* El logaritmo complementario 9,1872386 corresponde al número 0,1539.

El logaritmo complementario 6,6020600 tiene por número á 0,0004.

Cuando una fraccion propia se eleva á una potencia, al multiplicar su logaritmo complementario por el índice de la potencia, se multiplicarán por dicho esponente las 10 que tiene mas; y resultará el logaritmo complementario de la potencia con tantos 10 de mas, como unidades tiene el índice de la potencia.

*Ejemplo.* Se quiere elevar $\frac{5}{7}$ á la potencia 4.ª

L. C. $\frac{5}{7} = 9,8538720$

$\underline{\qquad\qquad\qquad 4}$

39,4154880: este es el L. C. $(\frac{5}{7})^4$ con 4 decenas de mas. Quitándole tres, será 9,4154880 el L. C. $(\frac{5}{7})^4$; y por tanto $(\frac{5}{7})^4 = 0,2603$.

Para estraer una raiz de una fraccion propia, añadanse á su logaritmo complementario tantas decenas menos una, como unidades tiene el índice de la raiz, y al partir por dicho índice quedará una sola decena de mas en el logaritmo de la raiz. *Ejemplo.* $\sqrt[3]{0,004}$ se halla añadiendo 2 decenas al L. C. de 0,004, que es 7,6020600. La suma 27,6020600 partida por 3, dará L. C. $\sqrt[3]{0,004} = 9,2006866$, y por tanto $\sqrt[3]{0,004} = 0,15874$.

*Ejemplo complicado resuelto por el cálculo logarítmico.*

$$\text{Sea } x = \frac{(63,9)\sqrt{\tfrac{21}{5}} \times \sqrt[3]{\tfrac{4}{13}}\,(2{,}6[illegible]8)^4}{27 \times 0{,}062}$$

$$\begin{aligned}
\text{L. } 63,9 &= 1{,}8055009 \\
\text{L. } \sqrt{\tfrac{21}{5}} &= 0{,}3116246 \\
\text{L. C } \sqrt[3]{\tfrac{4}{13}} &= 9{,}8293722 \\
\text{L. } (2{,}6[illegible]8)^4 &= 1{,}6775016 \\
\text{C. L. } 27 &= 8{,}5686362 \\
\text{C. L. C. } 0{,}062 &= 1{,}2076083 \\
\hline
23{,}4002438 &= \text{L. } x:
\end{aligned}$$

luego $x = 251[illegible], [illegible]$ y este será el resultado de todas las operaciones indicadas en el ejemplo.

71. En los cálculos de cámbios intervienen siempre factores ó divisores *constantes*, cuales son los números que espresan las razones entre las monedas corrientes de cada pais y su moneda de cambio. Buscando pues el cuarto término de la proporcion de conjunta, y viendo cual es en él el factor constante, se podrá tener calculado su logaritmo, y no será menester buscar en cada caso particular, sino los logaritmos de la letra y del cambio.

En el ejemplo que propusimos (57), para el cambio de Madrid con Londres, el 4.º término fué $\frac{51200 \times 35\frac{1}{2}}{112 \times 240}$ y su factor constante es $\frac{1}{512 \times 240}$. Su logaritmo complementario es 4,9105188, Sumando este logaritmo con el de la letra en maravedises y èl del cambio, se tendrá el logaritmo de la letra en esterlinas.

Haciendo lo mismo en los cambios de Paris, Amsterdam y otras partes, se formará una tabla de los logaritmos de los factores constantes: lo que reducirá todos los cálculos de cambio á una operacion sencillísima.

### 17.º Fracciones contínuas.

72 Fraccion contínua es aquella cuyo denominador en lugar de ser un número entero, es un número mixto; y el quebrado de este tiene por denominador, otro número mixto, y asi sucesivamente. Cualquier fraccion comun se puede reducir á contínua, dividiendo sus dos términos por su numerador, y repitiendo la misma operacion en los quebrados que resulten en el denominador. Asi todos los numeradores de las fracciones subordinadas serán iguales á la unidad.

*Ejemplo.*

La fraccion comun $\frac{216}{887}$ reducida á fraccion contínua es

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1\frac{1}{4}}}}}}$$

que para abreviar se pinta asi $1\,(4,\ 9,\ 2,\ 1,\ 1\tfrac{1}{4})$, teniendo presente que el numerador 1, que se escribe fuera del paréntesis, sirve para la fraccion y para todas las subordinadas: dentro del paréntesis estan los denominadores escritos en su órden. El último quebrado $\frac{1}{4}$ se escribe como está en la fraccion propuesta.

La fraccion contínua sirve para hallar una serie de fracciones comunes que se van accrcando cada vez mas y mas á la propuesta, de las cuales la primera es mayor que la propuesta, la segunda menor, la tercera mayor, la cuarta menor, y asi sucesivamente. La última debe ser igual á la propuesta. Esta aproximacion se hace 1.º despreciando todas las fracciones subordinadas. Asi resulta en el ejemplo anterior $\frac{1}{4}$, fraccion mayor que la propuesta: porque habiendo disminuido su denominador por la supresion de $1\,(9,\ 2,\ 1,\ 1\tfrac{1}{4})$, habrá resultado una fraccion mayor que la contínua.

2.º Despreciando todas las fracciones subordinadas menos la primera, quedará $1\,(4\tfrac{1}{9})$, que quiere decir la unidad dividida por $4\tfrac{1}{9}$, ó $\frac{9}{37}$. Esta fraccion es menor que la propuesta: porque el quebrado $\frac{1}{9}$, que es parte del divisor, se ha aumentado, puesto que he disminuido su denominador por la supresion de las fracciones siguientes.

3.° Tomo otra fraccion mas de las subordinadas, y quedará $1(4, 9\frac{1}{2})$; $9\frac{1}{2}$, partiendo á la unidad es $\frac{2}{19}$. Partiendo ahora la unidad por $4\frac{2}{19}$, resulta $\frac{19}{78}$ fraccion mayor qué la propuesta: porque habiendo disminuido el denominador de $\frac{1}{2}$, el divisor $9\frac{1}{2}$ es demasiado grande: luego el cociente de 1 partido por $9\frac{1}{2}$ es demasiado pequeño, como tambien el divisor $4\frac{2}{19}$; luego la unidad partida por $4\frac{2}{19}$ dará un cociente mayor que el verdadero.

Ya está conocido el orden y la razon de esta aproximacion. De cada vez se toma una fraccion subordinada mas que en la aproximacion anterior.

La cuarta aproximacion será $1(4, 9\frac{1}{3})$, que es $\frac{28}{115}$, menor que la fraccion propuesta.

La quinta es $1(4, 9, 2\frac{1}{2})$: el cociente de 1 partido por $2\frac{1}{2}$, es $\frac{2}{5}$, que añadido á 9 es $\frac{47}{5}$. La unidad partida por $\frac{47}{5}$ es $\frac{5}{47}$; que añadido á 4 es $\frac{193}{47}$: la unidad partida por este quebrado es $\frac{47}{193}$, mayor que la propuesta.

Ultimameute, si se toman todas las fracciones subordinadas, resultará la fraccion comun propuesta.

Esta operacion es utilísima para formar idea aproximada del valor de una fraccion irreductible, cuyos términos son muy grandes, en términos mas sencillos: por ejemplo, la fraccion propuesta $\frac{216}{887}$, podemos decir, que está entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{9}{37}$ menor que la primera y mayor que la segunda: pero se acerca mas á la segunda.

FIN DE LA ARITMÉTICA.